

Векторска анализа (кратак увод)

Градијент, дивергенција и ротор

Osnovna veličina koja karakteriše skalarno polje je tzv. *gradijent* skalarne funkcije kojom se opisuje polje. Vektorsko polje je karakterisano sa dve osnovne veličine, *divergencijom* i *rotorom* vektorske veličine kojom se polje opisuje.

1.3.1. Gradijent. Gradijent skalarne funkcije V se obeležava sa $\text{grad } V$, a definiše na sledeći način:

$$\text{grad } V = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S V \, dS. \quad (1)$$

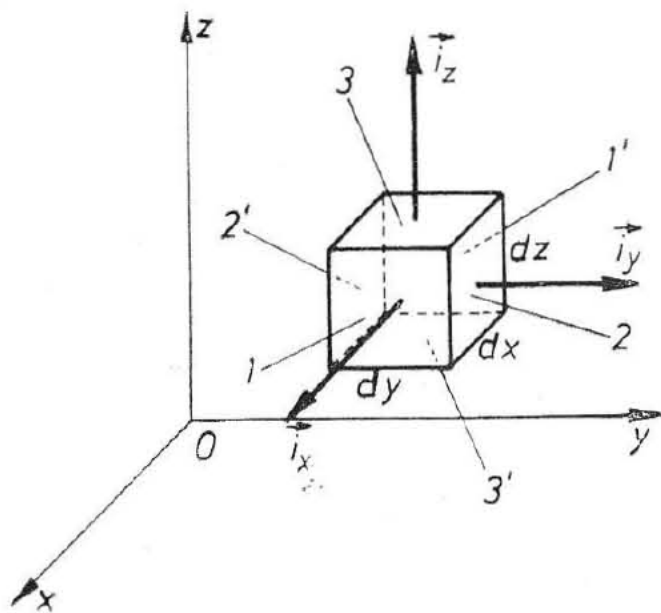
$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (2)$$

Vrlo često se, zbog skraćanja pisanja, uvodi tzv. „nabla“ operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad (3)$$

$$\text{grad } V = \nabla V. \quad (4)$$

Градијент, дивергенција и ротор



Sl. 1.4. Uz izvođenje izraza za gradijent, divergenciju i rotor u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu.

Градијент, дивергенција и ротор

1.3.2. Divergencija. Divergencija vektorske funkcije $\mathbf{A}$ definiše se relacijom (uz ista ograničenja za mali domen v kao u slučaju gradijenta)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5)$$

U Dekartovom koordinatnom sistemu izraz za divergenciju se dobija na sličan način kao za gradijent (v. sl. 1.4). Taj izraz glasi

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (6)$$

A_x , A_y i A_z su intenziteti vektorskih komponentata vektora $\mathbf{A}$ u smeru osa x , y i z . Divergencija u Dekartovom sistemu se može skraćeno pisati i pomoću nabra operatora,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (7)$$

gde tačka označava „skalarni proizvod“ vektorskog operatora nabra i vektora $\mathbf{A}$.

Градијент, дивергенција и ротор

1.3.3. Rotor. Rotor vektorske funkcije $\mathbf{A}$ definiše se relacijom

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}. \quad (8)$$

Pomoću sl. 1.4 se dolazi do zaključka da definicija (8) rotora daje u Dekartovom sistemu izraz za rotor

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{i}_x \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{i}_y \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}, \quad (9)$$

što se pomoću nabra operatora može napisati u obliku

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10)$$

Poređenjem jednačina (1), (5) i (8) sa jednačinama (4), (7) i (10) dolazimo do zaključka da je moguće definisati generalisani operator nabra,

$$\nabla = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S d\mathbf{S}, \quad (11)$$

a gradijent, divergenciju i rotor obeležavati sa ∇V , $\nabla \cdot \mathbf{A}$ i $\nabla \times \mathbf{A}$, ne ograničavajući se pri tome na Dekartov pravougli koordinatni sistem.

Градијент, дивергенција, ротор и лапласијан у Декартовом, цилиндричном и сферном координатном систему

- Декартов координатни систем

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z, \quad (3)$$

$$\text{div (grad } V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Градијент, дивергенција, ротор и лапласијан у Декартовом, цилиндричном и сферном координатном систему

- Цилиндрични координатни систем

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\phi + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{i}_z, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{div (grad } V) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Градијент, дивергенција, ротор и лапласијан у Декартовом, цилиндричном и сферном координатном систему

- Сферни координатни систем

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi, \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{i}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r) \right] \mathbf{i}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\theta r) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{div (grad } V) = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Неке диференцијалне релације

16. $\mathbf{i}_x \cdot \text{grad } V = \partial V / \partial x$ (x — произволjna osa)

17. $\text{grad } (V + W) = \text{grad } V + \text{grad } W$

18. $\text{grad } (VW) = V \text{ grad } W + W \text{ grad } V$

19. $(\mathbf{A} \cdot \text{grad}) V = \mathbf{A} \cdot \text{grad } V$

20. $\text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A}$

21. $\text{grad } f(V) = f'(V) \text{ grad } V$

22. $\text{div } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$

23. $\text{div } (V\mathbf{A}) = V \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } V$

24. $\text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$

25. $\text{rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$

26. $\text{rot } (V\mathbf{A}) = (\text{grad } V) \times \mathbf{A} + V \text{ rot } \mathbf{A}$

27. $\text{rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}$

Неке диференцијалне релације

$$28. \operatorname{grad} [\operatorname{div} (V\mathbf{A})] = (\operatorname{grad} V) \operatorname{div} \mathbf{A} + V \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) + \\ + (\operatorname{grad} V) \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) V + (\operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A}$$

$$29. \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$$

$$30. \operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = \nabla^2 V = \Delta V$$

$$31. \operatorname{div} [\operatorname{grad} (V + W)] = \operatorname{div} (\operatorname{grad} V) + \operatorname{div} (\operatorname{grad} W)$$

$$32. \operatorname{div} [\operatorname{grad} (VW)] = V \operatorname{div} (\operatorname{grad} W) + 2 \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} W + W \operatorname{div} (\operatorname{grad} V)$$

$$33. \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{A}) = \Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A})$$

$$34. \Delta (V\mathbf{A}) = V \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A} \Delta V + 2 (\operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A}$$

$$35. \operatorname{rot} (\operatorname{grad} V) = 0$$

$$36. \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

$$37. \operatorname{rot} [\operatorname{rot} (V\mathbf{A})] = (\operatorname{grad} V) \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \Delta V + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{grad} V + \\ + V \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) + (\operatorname{grad} V) \operatorname{div} \mathbf{A} - (\operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A}$$