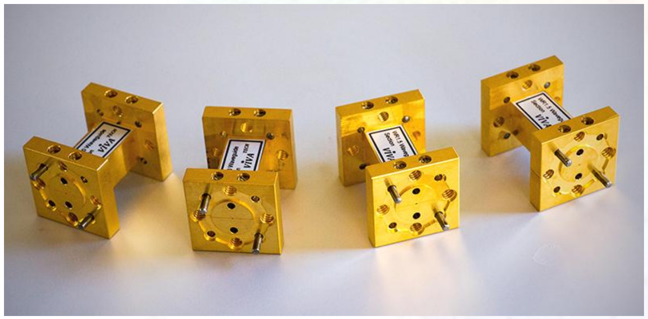
Опште особине вођених електромагнетских таласа

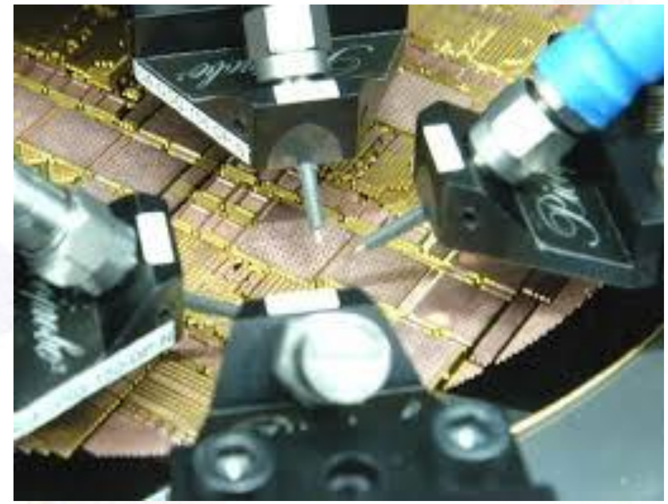


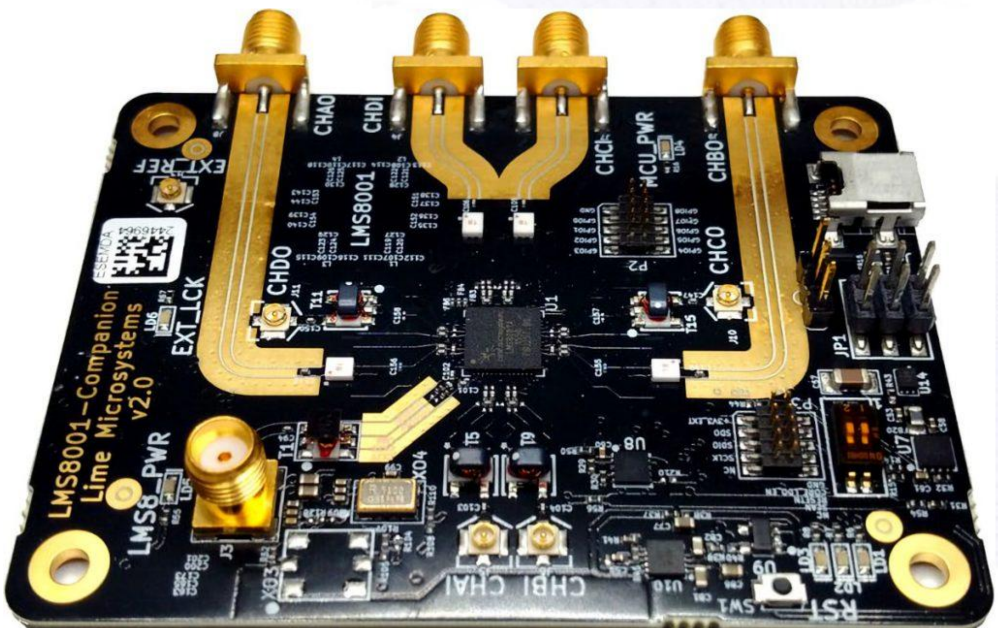
$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}},$$

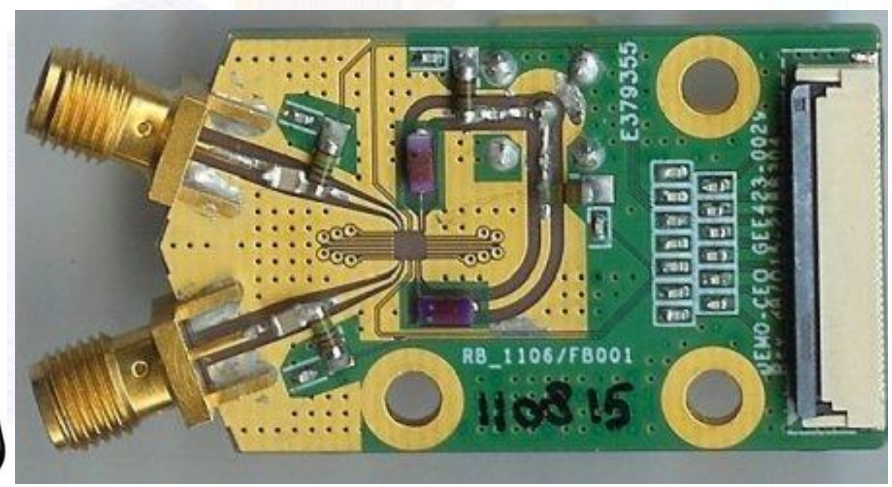
$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\,\underline{\mathbf{E}},$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{H}} = 0.$$







Увод

- Везе између елемената микроталасних кола **не могу** се остварити жицама или штампаним колима произвољног облика
  - Такви проводници уносе нежељене и тешко предвидљиве паразитне ефекте
    - Паразитне капацитивности и индуктивности, губици услед коначне проводности и услед зрачења
  - Паразитни ефекти доводе до губљења енергије сигнала, нежељених спрега, изобличења таласних облика сигнала ...
- Да би коло правилно функционисало, везе између елемената **морају имати дефинисане карактеристике** и морају да воде ЕМ енергију уз минимизацију губитака и других неповољних ефеката

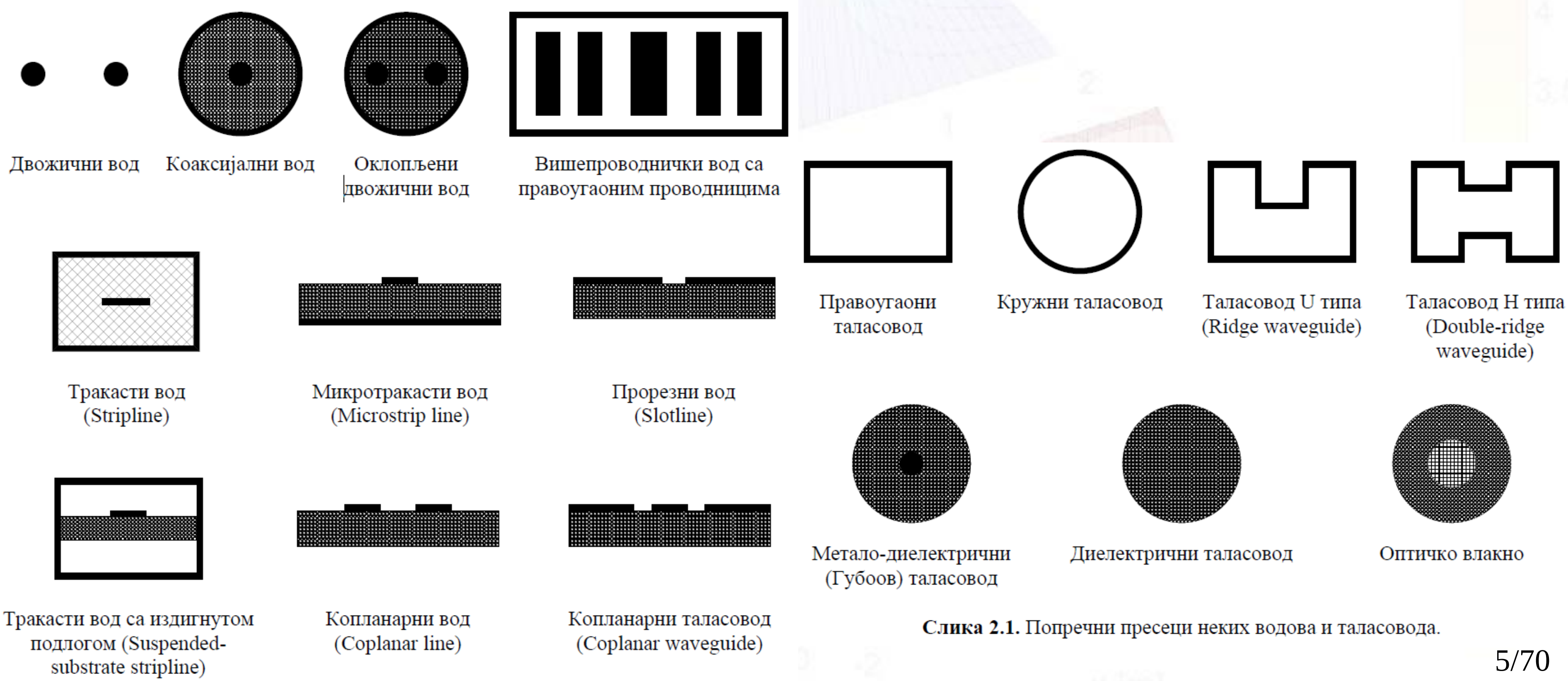
Увод

- Микроталасне учестаности су врло високе, па су ефекти простирања (кашњења) практично увек изражени
  - У анализи микроталасних кола мора се узети у обзир и таласна природа ЕМ поља
- Системи за вођење ЕМ таласа имају задатак да усмере ток ЕМ енергије дуж одређеног пута

Увод

- Системи за вођење ЕМ таласа се деле на:
  - **Водове**
    - Водови су системи од два или више паралелних проводника
  - **Таласоводе**
    - Таласоводи су металне цеви, диелектрични цилиндри или проводници пресвучени диелектриком, кроз које се могу простирати ЕМ таласи
- Водови и таласоводи би требало да што мање зраче ЕМ енергију и да имају што мање губитке
- Пожељно је да обезбеде простирање само једне врсте таласа
  - Тада је могуће једноставно и поуздано остваривање спреге између система за вођење ЕМ таласа и генератора, односно пријемника

Увод



Слика 2.1. Попречни пресеци неких водова и таласовода.

Увод

- Осим као системи за вођење ЕМ енергије (повезивање елемената кола), секције водова и таласовода се користе и као елементи микроталасних кола
  - Секција која је кратко спојена на једном крају, гледано са другог краја понаша се као **реактанса**, која се мења са учестаношћу и има низ резонантних и антирезонантних учестаности
    - Понаша се као калем, отворена веза, кондензатор или кратак спој, зависно од учестаности
    - Таквим секцијама се могу остварити филтри
  - Секција вода или таласовода чија је дужина једнака четвртини таласне дужине може послужити као **трансформатор импедансе**

Увод

- Посматраћемо само водове и таласоводе чији је попречни пресек исти дуж целог система (**униформни системи**)
- Најпре ћемо извести основне релације за ЕМ таласе вођене водовима и таласоводима **са линеарним хомогеним диелектриком**
  - Најпре ћемо сматрати да су проводници и диелектрици у систему савршени
  - Касније ћемо размотрити питање губитака у проводницима и диелектрицима
- Након тога разматраћемо униформне системе за вођење ЕМ таласа са **нехомогеним диелектриком (поглавље 4)**

Системи за вођење без губитака

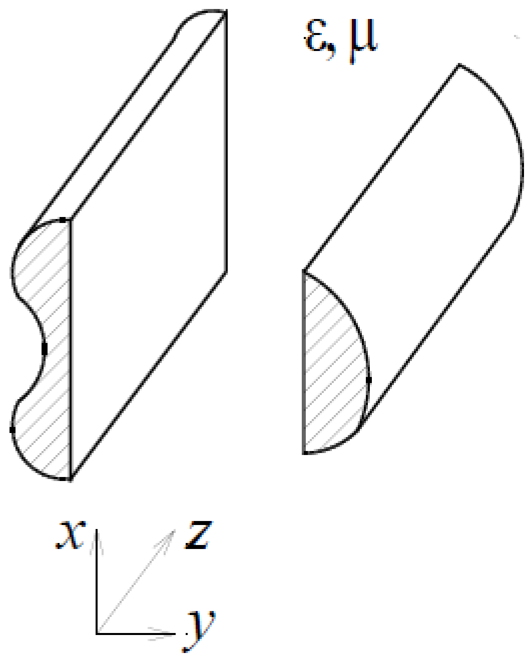
- Претпостављамо да је диелектрик идеалан (ε, μ), а проводници савршени ($\sigma \to \infty$)

- Максвелове једначине у диференцијалном облику у комплексном домену за ЕМ поље у диелектрику су тада:

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}},$$
$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\,\underline{\mathbf{E}},$$
$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{H}} = 0.$$

- Анализа система за вођење ЕМ таласа (одређивање $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$, а одатле и коефицијената простирања), заснива се на решавању Максвелових једначина за систем цилиндричне геометрије (јер се облик попречног пресека вода или таласовода не мења дуж система)

Системи за вођење без губитака



Слика 2.2. Координатни систем за анализу простирања таласа дуж униформног система за вођење.

- z-оса је дуж изводнице вода или таласовода
- Декартове координате *x* и *y* одређују положај тачке у трансверзалној равни
  - У цилиндричном координатном систему посматрамо одговарајуће ρ и φ координате

Системи за вођење без губитака

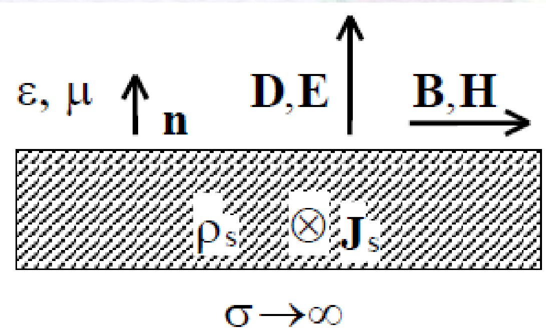
- Таласне (Хелмхолцове) једначине: $\Delta\underline{\mathbf{E}}=-k^2\,\underline{\mathbf{E}}$ и $\Delta\underline{\mathbf{H}}=-k^2\,\underline{\mathbf{H}}$
  - Лапласов оператор $\Delta=\nabla\cdot\nabla$ и константа $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$
- Иако су на први поглед таласне једначине за електрично и магнетско поље независне, не могу се решавати одвојено
  - Вектори $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$ повезани су Максвеловим једначинама
- Максвелове једначине је неопходно допунити граничним условима (на површи савршеног проводника)

$$\boxed{\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}}=0,}$$

$$\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{H}}=\underline{\mathbf{J}}_s,$$

$$\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{E}}=\frac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon},$$

$$\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{H}}=0$$



Слика 2.3. Уз граничне услове на површи савршеног проводника.

Системи за вођење без губитака

- Ротор и дивергенција се могу симболички представити као векторско, односно скаларно множење набла оператором (∇)
  - Овај оператор се може раставити на две компоненте
    - Једну у правцу простирања таласа (дуж *z*-осе)
    - Другу, трансверзалну, која је управна на *z*-осу

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z$$

    - У Декартовом систему је:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z \text{, т.ј. } \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y$$

Системи за вођење без губитака

- Претпоставимо да посматрамо само талас који се простире у позитивном смеру *z*-осе (у општем случају постоји и талас који се простире у негативном смеру *z*-осе)
  - Електрично и магнетско поље се тада могу представити као
    $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{E}}(x, y, 0)\exp(-\underline{\gamma} z)$ и
    $\underline{\mathbf{H}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{H}}(x, y, 0)\exp(-\underline{\gamma} z)$
    - $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ је **коефицијент простирања** (јединица за $\underline{\gamma}$ је 1/m)
      - α је **коефицијент слабљења** (јединица за α је Np/m)
      - β је **фазни коефицијент** (јединица за β је rad/m)
- Парцијални извод по z се сада своди на множење коефицијентом $-\underline{\gamma}$
  - Набла оператор добија облик $\nabla = \nabla_t - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z$
- На сличан начин могу се раставити и вектори $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$
  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_t + \underline{E}_z\mathbf{i}_z$ и $\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_t + \underline{H}_z\mathbf{i}_z$

Системи за вођење без губитака

- Из прве Максвелове једначине сада добијамо

$$\mathrm{rot}\underline{\mathbf{E}} = \nabla\times\underline{\mathbf{E}} = (\nabla_t - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z)\times(\underline{\mathbf{E}}_t + \underline{E}_z\mathbf{i}_z) = \nabla_t\times\underline{\mathbf{E}}_t + \nabla_t\times(\underline{E}_z\mathbf{i}_z) - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{E}}_t - \underbrace{\underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times(\underline{E}_z\mathbf{i}_z)}_{0}$$

$$= -\mathrm{j}\omega\mu(\underline{\mathbf{H}}_t + \underline{H}_z\mathbf{i}_z)$$

- –Изједначавањем трансверзалних и лонгитудиналних компоненти добија се

$$\nabla_t\times(\underline{E}_z\mathbf{i}_z) - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{E}}_t = -\mathrm{j}\omega\mu\underline{\mathbf{H}}_t,$$

$$\nabla_t\times\underline{\mathbf{E}}_t = -\mathrm{j}\omega\mu\underline{H}_z\mathbf{i}_z.$$

- –Сличним растављањем остале три Максвелове једначине добија се

$$\nabla_t\times(\underline{H}_z\mathbf{i}_z) - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{H}}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_t,$$

$$\nabla_t\times\underline{\mathbf{H}}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{E}_z\mathbf{i}_z,$$

$$\nabla_t\cdot\underline{\mathbf{E}}_t - \underline{\gamma}\underline{E}_z = 0,$$

$$\nabla_t\cdot\underline{\mathbf{H}}_t - \underline{\gamma}\underline{H}_z = 0.$$

Системи за вођење без губитака

- Ако преуредимо једначине $\begin{aligned}\nabla_t \times (\underline{E}_z \mathbf{i}_z) - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t &= -\mathrm{j}\omega\mu \underline{\mathbf{H}}_t, \\ \nabla_t \times (\underline{H}_z \mathbf{i}_z) - \underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t &= \mathrm{j}\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}_t.\end{aligned}$ добијамо

$\boxed{\mathbf{i}_z \times}$

$$\begin{aligned}\underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t - \mathrm{j}\omega\mu \underline{\mathbf{H}}_t &= \nabla_t \times (\underline{E}_z \mathbf{i}_z), \\ \mathrm{j}\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}_t + \underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t &= \nabla_t \times (\underline{H}_z \mathbf{i}_z).\end{aligned}$$

- Уочити да важи:

$$\nabla_t \times (\underline{E}_z \mathbf{i}_z) = (\nabla_t \underline{E}_z) \times \mathbf{i}_z + \underline{E}_z (\nabla_t \times \mathbf{i}_z) = -\mathbf{i}_z \times (\nabla_t \underline{E}_z),$$

$$\nabla_t \times (\underline{H}_z \mathbf{i}_z) = -\mathbf{i}_z \times (\nabla_t \underline{H}_z),$$

$$\mathbf{i}_z \times (\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t) = \mathbf{i}_z (\mathbf{i}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_t) - \underline{\mathbf{E}}_t (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z) = -\underline{\mathbf{E}}_t.$$

$$-\underline{\gamma}\underline{\mathbf{E}}_t - \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t = \nabla_t \underline{E}_z$$

$\boxed{\cdot\, \underline{\gamma}/(\mathrm{j}\omega\mu)}$

$\boxed{+}$

$\boxed{\cdot\, \mathrm{j}\omega\mu}$

$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{E}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{E}_z + \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z$$

На сличан начин добијамо $(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{H}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{H}_z - \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z$

Системи за вођење без губитака

- Ако се у таласне једначине ($\Delta\underline{\mathbf{E}}=-k^2\,\underline{\mathbf{E}}$ и $\Delta\underline{\mathbf{H}}=-k^2\,\underline{\mathbf{H}}$) уврсте једначине
  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_t + \underline{E}_z\mathbf{i}_z$, $\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_t + \underline{H}_z\mathbf{i}_z$ и $\Delta = \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \Delta_t + \underline{\gamma}^2$
  ($\Delta_t = \nabla_t \cdot \nabla_t$ је трансверзални лапласијан)
  добија се

$$\Delta_t \underline{E}_z + (\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{E}_z = 0,$$

$$\Delta_t \underline{H}_z + (\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{H}_z = 0.$$

Системи за вођење без губитака

- Једначине које представљају основу за анализу простирања вођених таласа

$$\nabla_t \times \underline{\mathbf{E}}_t = -\mathrm{j}\omega\mu \underline{H}_z \mathbf{i}_z, \qquad \nabla_t \times \underline{\mathbf{H}}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon \underline{E}_z \mathbf{i}_z.$$

$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{E}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{E}_z + \mathrm{j}\omega\mu \mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z, \qquad (\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{H}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{H}_z - \mathrm{j}\omega\varepsilon \mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z.$$

$$\Delta_t \underline{E}_z + (\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{E}_z = 0, \qquad \Delta_t \underline{H}_z + (\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{H}_z = 0.$$

- У униформним системима за вођење могу, у принципу, постојати две класе таласа, у зависности од тога да ли је $\underline{\gamma}^2 + k^2 = 0$ или је $\underline{\gamma}^2 + k^2 \neq 0$.
  - У случају $\underline{\gamma}^2 + k^2 = 0$ ради се о ТЕМ таласима
  - У случају $\underline{\gamma}^2 + k^2 \neq 0$ ради се о ТЕ, ТМ и хибридним таласима

TEM таласи

- Посматрајмо прво случај $\underline{E}_z = 0$ и $\underline{H}_z = 0$
  - Како би постојала нетривијална решења за $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$, из једначина

$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{E}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{E}_z + \mathrm{j}\omega\mu\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z,$$

$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{H}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{H}_z - \mathrm{j}\omega\varepsilon\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z,$$

  следи да тада мора бити $\underline{\gamma}^2 + k^2 = 0$, односно $\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

- Овакав талас нема компоненте поља у правцу простирања, већ само трансверзалне компоненте електричног и магнетског поља, па се назива **трансверзалним електромагнетским таласом** (TEM)
  - Коефицијент простирања TEM таласа је исти као за униформан, раван талас који се простире у хомогеној средини параметара ε и μ

ТЕМ таласи

- Из једначина $\underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t - \mathrm{j}\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}}_t = \nabla_t \times (\underline{E}_z \mathbf{i}_z)$, $\mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_t + \underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t = \nabla_t \times (\underline{H}_z \mathbf{i}_z)$ за $\underline{E}_z$=0 и $\underline{H}_z$=0 следи

$$\boxed{\begin{aligned} -\underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t &= \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_t, \\ \underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t &= \mathrm{j}\omega\mu\underline{\mathbf{H}}_t. \end{aligned}}$$

(две идентичне релације пошто је $\underline{\gamma}/\mathrm{j}\omega\varepsilon = \mathrm{j}\omega\mu/\underline{\gamma} = \sqrt{\mu/\varepsilon}$)

- Из ових једначина се показује да су вектори $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_t$ и $\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_t$ међусобно управни, а да између њихових интензитета постоји однос који зависи само од особина диелектрика
- Тај однос,

$$Z_{\mathrm{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

назива се **таласном импедансом** ТЕМ типа таласа

ТЕМ таласи

- Расподела електричног поља по попречном пресеку система је сада одређена једначинама

$$\nabla_t \times \underline{\mathbf{E}}_t = 0,$$

$$\nabla_t \cdot \underline{\mathbf{E}}_t = 0,$$

  које су формално идентичне једначинама у електростатици за дводимензиони систем
  - У дводимензионом електростатичком систему је $\partial / \partial z = 0$, а електростатичко поље има само трансверзалне компоненте
- Гранични услови на површи проводника су исти као у електростатици ($\underline{\mathbf{E}}_t = 0$)

ТЕМ таласи

- Расподела електричног поља по попречном пресеку поклапа се са одговарајућом расподелом електростатичког поља
  - Међутим, код система за вођење електрично поље се мења дуж z-осе због фактора $\exp(-\underline{\gamma} z)$, а мења се и у времену (простопериодична функција), док је у електростатичком случају поље независно од z-координате као и од времена

ТЕМ таласи

- Да би енергија у дводимензионом електростатичком систему била коначна, систем се мора састојати од бар два проводника, јер збир густина подужних наелектрисања (Q') свих проводника мора бити једнак нули, тј. мора да важи

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i' = 0 \quad (N \text{ је број проводника})$$

- На основу тога и систем за вођење ТЕМ таласа мора имати бар два проводника, односно то мора бити вод

ТЕМ таласи

- На основу граничних услова $\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{H}}=\underline{\mathbf{J}}_s$ и $\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{E}}=\dfrac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon}$

  и једначина $\begin{aligned}-\underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{H}}_t&=\mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_t\\ \underline{\gamma}\mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{E}}_t&=\mathrm{j}\omega\mu\underline{\mathbf{H}}_t\end{aligned}$ следи да код водова са ТЕМ таласом постоји следећа веза између густине површинског наелектрисања и густине површинске струје на површи проводника

  $\underline{\rho}_s=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\underline{J}_{sz}$ (вектор $\underline{\mathbf{J}}_s$ има само z-компоненту)

- Одавде следи услов да је алгебарски збир струја у свим проводницима вода једнак нули

$$\sum_{i=1}^{N}\underline{I}_i=0$$

ТЕМ таласи

- Од Максвелових једначина остале су још неискоришћене једначине $\nabla_t \times \underline{\mathbf{H}}_t = 0$ и $\nabla_t \cdot \underline{\mathbf{H}}_t = 0$

- Ове једначине аутоматски су задовољене (не носе додатну информацију) због везе

$$\underline{\gamma}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t = \mathrm{j}\omega\mu\underline{\mathbf{H}}_t$$

и једначина

$$\nabla_t \times \underline{\mathbf{E}}_t = 0,$$
$$\nabla_t \cdot \underline{\mathbf{E}}_t = 0.$$

– Користан векторски идентитет

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{grad})\,\boldsymbol{B}$$

TE, TM и хибридни таласи

- Ако је $\underline{E}_z = 0$ и $\underline{H}_z \neq 0$ имамо **трансверзалне електричне таласе (ТЕ таласе)**, који се називају и **Н таласима**
- Ако је $\underline{E}_z \neq 0$ и $\underline{H}_z = 0$ имамо **трансверзалне магнетске таласе (ТМ таласе)**, који се називају и **Е таласима**
- Ако је $\underline{E}_z \neq 0$ и $\underline{H}_z \neq 0$ имамо **хибридне таласе**, који се називају и **ЕН** или **НЕ таласима**
  - Простиру се дуж система за вођење са нехомогеним диелектриком
- За све побројане типове таласа је $\underline{\gamma}^2 + k^2 \neq 0$
- ТЕ, ТМ и хибридни таласи могу се простирати како дуж водова, тако и дуж таласовода
- Посматраћемо само ТЕ и ТМ таласе који се простиру дуж система за вођење са хомогеним диелектриком

ТЕ таласи

- Уведимо ознаку $\underline{K}^2 = \underline{\gamma}^2 + k^2$
- На основу релација
$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{E}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{E}_z + \mathrm{j}\omega\mu\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z,$$
$$(\underline{\gamma}^2 + k^2)\underline{\mathbf{H}}_t = -\underline{\gamma}\nabla_t \underline{H}_z - \mathrm{j}\omega\varepsilon\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z.$$
  - за ТЕ таласе тада имамо
$$\underline{\mathbf{E}}_t = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\underline{K}^2}\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z,$$
$$\underline{\mathbf{H}}_t = -\frac{\underline{\gamma}}{\underline{K}^2}\nabla_t \underline{H}_z.$$
  - Из ових релација следи да су $\underline{\mathbf{E}}_t$ и $\underline{\mathbf{H}}_t$ **потпуно одређени** преко $\underline{H}_z$

ТЕ таласи

- Лонгитудијална компонента магнетског поља ($\underline{H}_z$) је решење таласне једначине, која се може написати у облику $\Delta_t \underline{H}_z + \underline{K}^2 \underline{H}_z = 0$ и одговарајућих граничних услова на површи проводника
- Математичком анализом се може показати да ова таласна једначина са граничним условима има решење само за дискретне вредности коефицијента $\underline{K}^2$
  - Ова решења зависе од облика система за вођење таласа
- Ове вредности се називају својственим (**сопственим**) вредностима система за вођење, а таласна једначина представља карактеристичну једначину, односно једначину својствених вредности

ТЕ таласи

- С обзиром на то да смо претпоставили да се све величине које описују поље мењају дуж z-осе као $\exp(-\underline{\gamma}z)$, за $\underline{H}_z$ можемо писати

$$\underline{H}_z(x, y, z) = \underline{H}_z(x, y, 0)\exp(-\underline{\gamma}z)$$

- $\underline{H}_z(x, y, 0)$ зависи само од трансверзалних координата
  - Као решење таласне једначине са граничним условима добијају се $\underline{H}_z(x,y,0)$ и коефицијент $\underline{K}^2$
    - Коефицијент простирања ($\underline{\gamma}$) је сада одређен, јер је познато $\underline{K}^2$, а $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ је одређено радном учестаношћу и параметрима диелектрика

ТЕ таласи

- Из једначина
$$\underline{\mathbf{E}}_t = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\underline{K}^2}\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{H}_z \qquad \underline{\mathbf{H}}_t = -\frac{\underline{\gamma}}{\underline{K}^2}\nabla_t \underline{H}_z$$
следи да је
$$\underline{\mathbf{E}}_t = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\underline{\gamma}}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t \qquad \underline{\mathbf{H}}_t = \frac{\underline{\gamma}}{\mathrm{j}\omega\mu}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t$$
- То значи да су вектори $\underline{\mathbf{E}}_t$ и $\underline{\mathbf{H}}_t$ међусобно управни, а количник њихових интензитета је **исти у свим тачкама** система за вођење
- Тај количник износи $\underline{Z}_{\mathrm{TE}} = \dfrac{\mathrm{j}\omega\mu}{\underline{\gamma}}$ и назива се **таласном импедансом ТЕ таласа**

TM таласи

- Слично се добија и за TM таласе

$$\underline{\mathbf{E}}_t = -\frac{\underline{\gamma}}{\underline{K}^2}\nabla_t \underline{E}_z$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\underline{K}^2}\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z$$

уз $\Delta_t \underline{E}_z + \underline{K}^2 \underline{E}_z = 0$

- $\underline{E}_z$ је облика $\underline{E}_z(x, y, z) = \underline{E}_z(x, y, 0)\exp(-\underline{\gamma} z)$
- Код TM таласа се као решење таласне једначине и граничних услова добија $\underline{E}_z(x, y, 0)$ и коефицијент $\underline{K}^2$

ТМ таласи

- Из једначина

$$\underline{\mathbf{E}}_t = -\frac{\underline{\gamma}}{\underline{K}^2}\nabla_t \underline{E}_z$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\underline{K}^2}\mathbf{i}_z \times \nabla_t \underline{E}_z$$

следи

$$\underline{\mathbf{E}}_t = -\frac{\underline{\gamma}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{H}}_t$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t = \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\underline{\gamma}}\mathbf{i}_z \times \underline{\mathbf{E}}_t$$

- То значи да су вектори $\underline{\mathbf{E}}_t$ и $\underline{\mathbf{H}}_t$ међусобно управни, а количник њихових интензитета је исти **у свим тачкама** система за вођење

- Тај количник се назива **таласна импеданса ТМ таласа** и износи

$$\underline{Z}_{\mathrm{TM}} = \frac{\underline{\gamma}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}$$

TE и TM таласи – критична учестаност

- За TE и TM таласе имамо $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{K}^2 - k^2} = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \underline{K}^2}$
  - $\underline{K}^2$ зависи само од облика система за вођење и типа таласа
    - У једначинама $\Delta_t \underline{H}_z + \underline{K}^2 \underline{H}_z = 0$, $\Delta_t \underline{E}_z + \underline{K}^2 \underline{E}_z = 0$ не јавља се учестаност
      - $\underline{K}$ не зависи од учестаности
      - Може се показати да је за затворене таласоводе $\underline{K}^2$ увек чисто реалан број
  - Из претходне једначине следи да је $\underline{\gamma}$ чисто имагинарно ако је $\omega^2\varepsilon\mu - \underline{K}^2 > 0$, а чисто реално ако је $\omega^2\varepsilon\mu - \underline{K}^2 < 0$
  - Учестаност при којој је $\omega^2\varepsilon\mu - \underline{K}^2 = 0$ назива се **критичном учестаности за посматрани тип таласа**

ТЕ и ТМ таласи – критична учестаност

- Ако је учестаност нижа од критичне, $\underline{\gamma}$ је чисто реално, $\underline{\gamma}=\alpha$, а промена поља дуж z-осе је одређена фактором $\exp(-\underline{\gamma}z)=\exp(-\alpha z)$
  - Талас се **не простире**, већ експоненцијално слаби дуж z-осе, не мењајући фазу
- Ако је учестаност виша од критичне, $\underline{\gamma}$ је чисто имагинарно, $\underline{\gamma}=j\beta$, а промена поља дуж z-осе је одређена фактором $\exp(-\underline{\gamma}z)=\exp(-j\beta z)$
  - Талас **се простире** дуж z-осе
    - Талас дуж z-осе не мења интензитет, али му се мења фаза (опада у смеру простирања таласа)

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Таласна дужина

- **Таласна дужина** је растојање између два најближа трансверзална пресека система за вођење у којима је талас у фази
  - Таласну дужину ћемо означавати са λ_g
    - Индекс "g" потиче од "guided wave" и указује да је таласна дужина везана за посматрани систем за вођење таласа
  - Између таласне дужине и фазног коефицијента постоји веза $\lambda_g = 2\pi/\beta$
    - Ово се једноставно добија полазећи од зависности фазе таласа који се простире дуж z-осе која је облика $\exp(-j\beta z)$

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Фазна брзина

- Замислимо да се посматрач креће у смеру *z*-осе тако да талас увек види у истој фази
  - За посматрача мора да важи $\omega t - \beta z = \text{const}$
    - Брзина којом се креће тај посматрач је тада $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = \omega/\beta = c_\phi$ и назива се **брзином простирања фазе таласа (фазном брзином таласа)**

- TEM талас
  - За TEM талас је $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, одакле је $c_\phi = 1\big/\sqrt{\varepsilon\mu} = c_0\big/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$
    - c_ϕ не зависи од учестаности (ако се занемаре губици и промене параметара ε и μ са променом учестаности)
  - Таласна дужина је $\lambda_g = 2\pi/\beta = c_0\big/\left(f\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\right) = \lambda_0\big/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} < \lambda_0$
    - Таласна дужина (λ_g) не може бити већа од таласне дужине у слободном простору (λ_0)

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Фазна брзина

- За TE и TM таласе је, **при** $f > f_c$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \underline{K}^2} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

одакле је
$$c_\phi = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

- Код TE и TM таласа c_ϕ може бити и мање и веће од c_0, а λ_g и веће и мање од λ_0
  - То је зато што је **фазна брзина математички уведена величина**, а не брзина којом се преноси енергија или информација

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Групна брзина

- **Групна брзина** је
  још једна математички уведена величина
  - **Представља брзину простирања фазе синусоидалне модулације синусоидалног носиоца**
  - Посматрајмо амплитудски модулисан сигнал са два бочна опсега
    - Нека је преношени сигнал у пресеку $z = 0$ дат изразом

$$a(t,0) = A_\mathrm{m} \cos\omega t \cos\Omega t = \frac{1}{2} A_\mathrm{m} \left(\cos(\omega+\Omega)t + \cos(\omega-\Omega)t\right)$$

Ω је учестаност модулишућег сигнала, а ω је учестаност носиоца (Ω << ω)

- У пресеку одређеном координатом z је

$$a(t,z) = \frac{1}{2} A_\mathrm{m} \left\{\cos\left[(\omega+\Omega)t - \beta_{(\omega+\Omega)} z\right] + \cos\left[(\omega-\Omega)t - \beta_{(\omega-\Omega)} z\right]\right\}$$

– Користан образац $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Групна брзина

- Пошто је $\Omega << \omega$, промена β када се угаона учестаност мења од $\omega - \Omega$ до $\omega + \Omega$ се може апроксимирати линеарном функцијом (са прва два члана Тејлоровог развоја) као

$$\beta_{(\omega+\Delta\omega)} = \beta_{(\omega)} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\Delta\omega$$

па је $$a(t,z) = A_\mathrm{m}\left[\cos\left(\Omega\left(t - z\frac{\mathrm{d}\beta_{(\omega)}}{\mathrm{d}\omega}\right)\right)\cos\left(\omega t - \beta_{(\omega)} z\right)\right]$$

– Из претходног израза види се да модулишући сигнал у пресеку z касни за $z\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega$ у односу на сигнал у пресеку z = 0, па је групна брзина

$$c_\mathrm{g} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}}$$

- Користан образац

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Групна брзина

- За TEM таласе је $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega = \sqrt{\varepsilon\mu} = \beta/\omega$, тј.

$$c_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}} = c_{\phi}$$

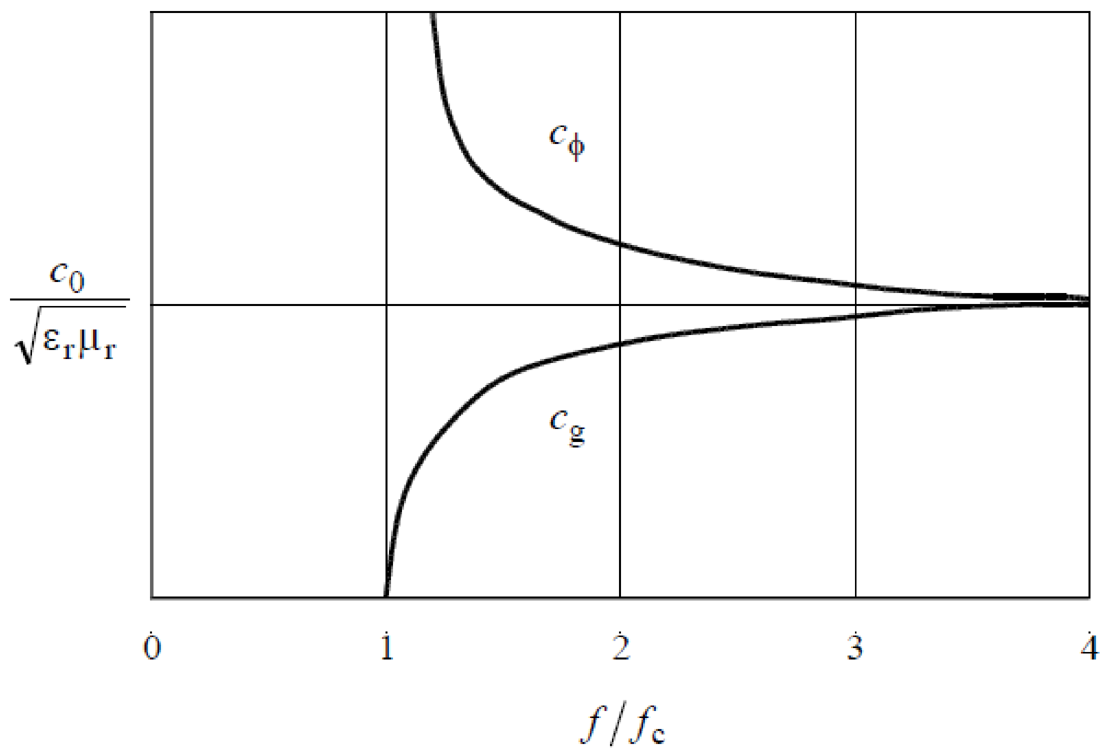
  - Фазна и групна брзина су **међусобно једнаке и не зависе од учестаности** (уколико се параметри средине не мењају са учестаношћу)

- За TE и TM таласе је $c_{\mathrm{g}} = \dfrac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}$

  - Пошто је $c_{\phi} = \dfrac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}}$ важи $\boxed{c_{\phi}c_{\mathrm{g}} = \dfrac{c_0^2}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}}$

Таласна дужина, фазна и групна брзина – Групна брзина

- Зависност фазне и групне брзине од учестаности код **TE** и **TM** таласа



Слика 2.4. Зависност фазне (c_ϕ) и групне брзине (c_g) од нормализоване учестаности (f/f_c).

Таласна дужина, фазна и групна брзина

- Таласне импедансе TE и TM таласа могу се написати у облику $\underline{Z}_{\mathrm{TE}} = \dfrac{Z_{\mathrm{TEM}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}}$ $\quad \underline{Z}_{\mathrm{TM}} = Z_{\mathrm{TEM}}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}$
- Ако је $f < f_{\mathrm{c}}$, онда је за TE и TM таласе $\underline{\gamma} = \alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\left(\dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2 - 1}$
- Ако је $f \ll f_{\mathrm{c}}$, онда је $\alpha \approx \omega_{\mathrm{c}}\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi f_{\mathrm{c}}\sqrt{\varepsilon\mu}$, и не зависи од учестаности
  - На овој чињеници се заснива рад неких ослабљивача (атенуатора)

Таласна дужина, фазна и групна брзина - Дисперзија

- Појава да групна брзина зависи од учестаности назива се **дисперзијом**
  - Због дисперзије се таласни облик преношеног сигнала изобличује, што често ограничава капацитет канала за пренос информација
    - На пример, код дигиталног преноса долази до преклапања симбола (интерсимболска интерференција), што може онемогућити детекцију

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Снага која се простире прогресивним таласом на неком систему за вођење таласа може се добити као флукс Поинтинговог вектора кроз попречни пресек диелектрика система, тј. као

$$P_{\mathrm{t}} = \mathrm{Re}\left[\int_{S_t} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\right] = \frac{1}{Z_{\mathrm{T}}} \int_{S_t} \left|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{t}}\right|^2 \mathrm{d}S = Z_{\mathrm{T}} \int_{S_t} \left|\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{t}}\right|^2 \mathrm{d}S,$$

  где је Z_{T} таласна импеданса
- У претходном изразу подразумева се да се талас заиста простире (тј. да је $f > f_{\mathrm{c}}$), због чега је таласна импеданса чисто реална, а Поинтингов вектор у правцу z-осе има само реални део

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- У досадашњој анализи сматрали смо да систем за вођење нема губитака
- У свим реалним системима постоје губици, али су они обично мали, па се за њихово одређивање може користити **пертурбациони метод**
- Пертурбациони метод
  - Најпре се претпостави да је систем без губитака
  - Одреди се структура поља одговарајућег система без губитака
  - На основу те расподеле поља и оригиналних параметара средине одреде се губици

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Када у систему има губитака, онда је, за $f > f_c$, $\underset{\sim}{\gamma} = \alpha + j\beta$, па интензитети поља слабе као $\exp(-\alpha z)$ дуж система за вођење
- Из израза за Поинтингов вектор следи да преношена снага слаби дуж вода као $\exp(-2\alpha z)$ јер је снага сразмерна квадрату интензитета поља
- На основу тога за преношену снагу може се написати $P_t(z)=P_t(0)\exp(-2\alpha z)$, одакле је

$$P'_{\mathrm{gub}} = -\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}z} = 2\alpha\, P_t(0)\,\exp(-2\alpha z) = 2\alpha P_t(z)$$

  где је P'_{gub} подужна снага губитака
- На основу претходног израза, одређујемо коефицијент слабљења као

$$\boxed{\alpha = \frac{P'_{\mathrm{gub}}}{2P_t}}$$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- У општем случају губици постоје и у проводницима, и у диелектрику система за вођење, односно важи

$$P'_{\mathrm{gub}} = P'_{\mathrm{p}} + P'_{\mathrm{d}}\,,$$

  где је P'_{p} подужна снага губитака у проводницима, а P'_{d} подужна снага губитака у диелектрику система за вођење
- Израз за коефицијент слабљења може се представити у виду збира два сабирка

$$\alpha = \alpha_{\mathrm{p}} + \alpha_{\mathrm{d}} = \frac{P'_{\mathrm{p}}}{2P_{\mathrm{t}}} + \frac{P'_{\mathrm{d}}}{2P_{\mathrm{t}}}$$

  – Први сабирак одговара губицима у проводницима
  – Други сабирак одговара губицима у диелектрику

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- При врло високим учестаностима површински ефекат је изражен у готово свим водовима и таласоводима (изузев код танкослојних проводних филмова)
- Поље које продире у проводник се онда локално понаша као униформан раван талас
  - Коефицијент простирања овог таласа је

$$\underline{\gamma}_{\mathrm{p}} = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{p}}\sigma_{\mathrm{p}}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\pi\mu_{\mathrm{p}} f\sigma_{\mathrm{p}}}$$

    - μ_{p} и σ_{p} су параметри проводника, а f је радна учестаност
  - Оваква талас експоненцијално слаби са продирањем у проводник, а коефицијент слабљења је

$$\alpha_{\mathrm{p}} = \sqrt{\pi\mu_{\mathrm{p}} f\sigma_{\mathrm{p}}}$$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Дубина продирања се дефинише као растојање на коме поље таласа опадне e пута (e је основа природних логаритама и износи e=2,7182818…),
  и код простирања у проводнике износи

$$\delta_p = 1/\alpha_p = 1/\sqrt{\pi \mu_p f \sigma_p}$$

- За рачунање дубине продирања у **бакар** може се користити следећи нумерички образац

$$\delta_{Cu} = (66\ \mu m)/\sqrt{f_{[MHz]}}$$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Таласна импеданса таласа који продире у проводник је

$$\underline{Z}_{\mathrm{TEMp}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu_{\mathrm{p}}}{\sigma_{\mathrm{p}}}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi\mu_{\mathrm{p}} f}{\sigma_{\mathrm{p}}}}$$

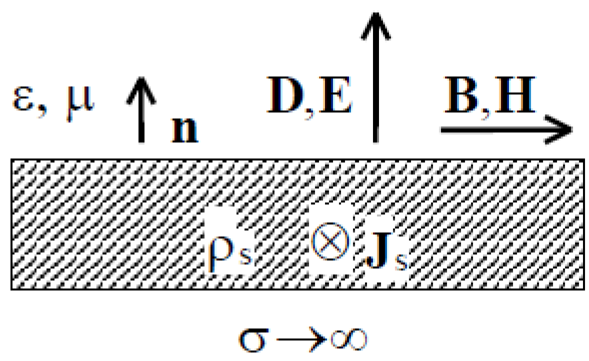
- Реални део ове импедансе се назива **површинском отпорности**

$$R_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\pi\mu_{\mathrm{p}} f}{\sigma_{\mathrm{p}}}}$$

- Између површинске отпорности и дубине продирања постоји веза $R_{\mathrm{s}} = 1/(\sigma_{\mathrm{p}}\delta)$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Површинска густина средње снаге која продире у проводник (тј. површинска густина снаге губитака у проводнику) је
$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}S} = -\mathrm{Re}\left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^{*}\right)\cdot \mathbf{n} = R_{\mathrm{s}}\left|\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{tg}}\right|^{2}$$
  - $-(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^{*})\cdot\mathbf{n}$ је нормална компонента Поинтинговог вектора на површи проводника, усмерена ка проводнику, а $\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{tg}}$ је тангенцијална компонента магнетског поља



Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- На основу претходног израза добијамо

$$P'_{\mathrm{p}} = \oint_{C_{\mathrm{p}}} R_{\mathrm{s}} \left| \underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{tg}} \right|^2 \mathrm{d}l$$

C_{p} је контура попречног пресека свих проводника система

- Губици у проводнику се финално рачунају као

$$\alpha_{\mathrm{p}} = P'_{\mathrm{p}} / \left(2 P_{\mathrm{t}} \right)$$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Губици у диелектрику потичу од поларизационих губитака (диелектричног хистерезиса) и од коначно мале специфичне проводности диелектрика (Џулових губитака)
- Пермитивност диелектрика са губицима може се написати у облику

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

ε'' карактерише поларизационе губитке

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Из друге Максвелове једначине следи

$$\operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}} = \sigma_d\underline{\mathbf{E}} + j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}} = j\omega\left(\underline{\varepsilon} + \sigma_d/(j\omega)\right)\underline{\mathbf{E}} = j\omega\underline{\varepsilon}_e\underline{\mathbf{E}}$$

  где је σ_d специфична проводност диелектрика, а $\underline{\varepsilon}_e = \underline{\varepsilon} + \sigma_d/(j\omega) = \varepsilon' - j(\varepsilon'' + \sigma_d/\omega)$ је еквивалентна комплексна пермитивност, која у себи укључује све врсте губитака у диелектрику
- Реални део ове пермитивности је $\operatorname{Re}(\underline{\varepsilon}_e) = \varepsilon_e' = \varepsilon'$, а имагинарни је $\operatorname{Im}(\underline{\varepsilon}_e) = -\varepsilon_e'' = -(\varepsilon'' + \sigma_d/\omega) = -\sigma_e/\omega$, где σ_e представља еквивалентну специфичну проводност диелектрика
- Однос $\tan\delta_d = \varepsilon''/\varepsilon'$ назива се **тангенсом угла губитака диелектрика**

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Део коефицијента слабљења који потиче од губитака у диелектрику може се израчунати на два начина
- Први начин је да се најпре израчуна подужна снага губитака у диелектрику, P'_{d}, на основу запреминске густине снаге губитака у диелектрику као

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{d}}/\mathrm{d}v = \sigma_{\mathrm{e}}|\underline{\mathbf{E}}|^2 \qquad P'_{\mathrm{d}} = \int_{S_{\mathrm{t}}} \sigma_{\mathrm{e}}|\underline{\mathbf{E}}|^2 \,\mathrm{d}S$$

- За ТЕМ и ТЕ таласа је $\underline{\mathbf{E}}=\underline{\mathbf{E}}_t$, па је коефицијент слабљења у диелектрику

$$\alpha_{\mathrm{d}} = \frac{P'_{\mathrm{d}}}{2P_t} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{2} Z_{\mathrm{T}} = \frac{\omega^2 \varepsilon' \mu}{2\beta} \tan\delta_{\mathrm{d}}$$

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- За ТЕМ таласе је

$$\alpha_d = \frac{\sigma_e}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \frac{\beta}{2}\tan\delta_d$$

- За ТЕ таласе је

$$\alpha_d = \frac{\sigma_e}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\beta\tan\delta_d}{2\left(1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)}$$

- За ТМ таласе мора се узети у обзир и лонгитудинална компонента електричног поља, али се, после интеграције, за ТМ талас добија исти израз као и за ТЕ талас

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Други, једноставнији начин је да се уврсти $\underline{\varepsilon}_e$ уместо ε приликом извођења једначина за вођене таласе
  Тада се за коефицијент простирања добија

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2 \underline{\varepsilon}_e \mu + \underline{K}^2} = \sqrt{-\omega^2 \varepsilon' \mu + j\omega\mu\sigma_e + \underline{K}^2}$$

- Узимајући у обзир да је имагинарни члан под кореном мали, развијањем у ред добија се

$$\underline{\gamma} = j\sqrt{\omega^2 \varepsilon' \mu - \underline{K}^2}\sqrt{1 - \frac{j\omega\mu\sigma_e}{\omega^2\varepsilon'\mu - \underline{K}^2}} \approx \frac{\sigma_e}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} + j\omega\sqrt{\varepsilon'\mu}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\left.\sqrt{1+x}\right|_{x \ll 1} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

  – Фазни коефицијент је практично исти као када губитака нема
  – Коефицијент слабљења је исти као што је изведено на први начин за ТЕМ, ТЕ и ТМ типове таласа

Средња снага, губици и коефицијент слабљења

- Уколико у диелектрику постоје и губици због магнетског хистерезиса (на пример, код феритних подлога које се користе у изради неких специјалних микроталасних компоненти), у претходне изразе треба, уместо обичне пермитивности, уврстити комплексну пермитивност $\underline{\mu}_e=\mu'-j\mu''$, где μ'' карактерише магнетске губитке
  - Развијањем израза за коефицијент простирања у ред добија се приближан израз за коефицијент слабљења у овом случају

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- У већини практичних примена диелектрик је део-по-део хомоген (на пример, слојевит, као код штампаних водова), док су континуално нехомогени диелектрици ретки
  - У овом одељку ћемо изложити основне појмове само о анализи система за вођење са диелектриком који је део-по-део хомоген

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- За сваки хомогени део Максвелове једначине (и једначине изведене из њих) и даље важе

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}},\quad \mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\,\underline{\mathbf{E}},\quad \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}} = 0,\quad \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{H}} = 0.$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = \omega^2\varepsilon\mu\,\underline{\mathbf{E}},\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}} - \Delta\underline{\mathbf{E}},\quad \Delta\underline{\mathbf{E}} = -k^2\underline{\mathbf{E}},\quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,.$$

- Осим ових једначина, електрично и магнетско поље треба да задовоље граничне услове
  - На раздвојној површи проводника и диелектрика

$$\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}} = 0,\quad \mathbf{n}\times\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_s,\quad \mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{E}} = \frac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon},\quad \mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{H}} = 0.$$

  - На раздвојној површи два диелектрика

$$\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}}_2 = 0,\quad \mathbf{n}\times\underline{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{n}\times\underline{\mathbf{H}}_2 = 0,\quad \varepsilon_1\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{E}}_1 - \varepsilon_2\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{E}}_2 = 0,\quad \mu_1\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{H}}_1 - \mu_2\mathbf{n}\cdot\underline{\mathbf{H}}_2 = 0.$$

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- **У општем случају**, систем са нехомогеним диелектриком може да води **само хибридне таласе**
- Такав талас **мора имати јединствен коефицијент простирања за цео систем**, без обзира на диелектрик у коме посматрамо електромагнетско поље
  - У противном, не бисмо могли да говоримо о јединственом таласу у целом систему

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

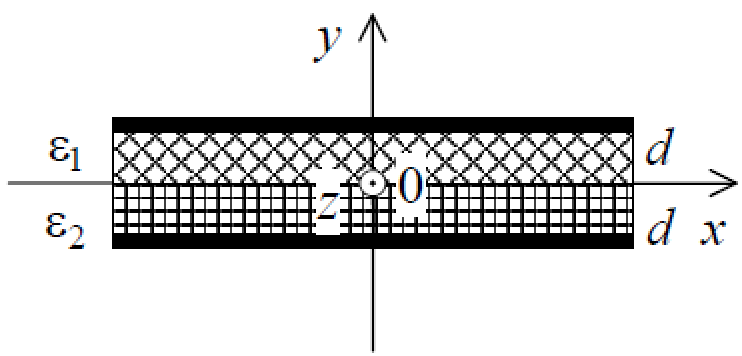
- Водови са **нехомогеним диелектриком не могу водити ТЕМ талас**
  - Претпоставимо да се у оваквом систему може простирати прави ТЕМ талас
  - За сваки хомогени део диелектрика би у том случају остале у важности једначине које описују систем за вођење са ТЕМ таласом, укључујући и резултат за коефицијент простирања $\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$
  - Параметри средине су различити за различите делове диелектрика, тако да би се за сваки део добио другачији коефицијент простирања
  - Ово противречи претпоставци да посматрамо јединствен талас

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Водови са **нехомогеним диелектриком**, строго говорећи, могу водити **само хибридне таласе**
  - При ниским учестаностима, структура поља оваквих таласа личи на ТЕМ талас јер су испуњени услови
    $$\left|\underline{E}_z\right| << \left|\underline{\mathbf{E}}_t\right|,$$
    $$\left|\underline{H}_z\right| << \left|\underline{\mathbf{H}}_t\right|.$$
    - Трансверзалне компоненте поља доминирају у односу на лонгитудијалне
  - Такви таласи се називају **квази-ТЕМ** таласима
- **Критична учестаност квази-ТЕМ таласа једнака је нули**, као и код правих ТЕМ таласа
- Квази-ТЕМ таласи имају изражену дисперзију при високим учестаностима
  - Структура поља таласа се мења са променом учестаности

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Илустрација …
- Посматрајмо вод приказан на слици
  - Проводници су веома широке траке (тако да се ивични ефекти могу занемарити)
  - Диелектрик је двослојан (ε_1 и μ_0, односно ε_2 и μ_0)



Слика 2.5. Попречни пресек тракастог вода са двослојним диелектриком.

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- На основу електростатичке анализе овог система, има смисла претпоставити да електрично поље има само *y*-компоненту
- Претпоставимо да је то и једина компонента електричног поља, а да магнетско поље има само *x*-компоненту
- Тада је за $y = 0$ (на раздвојној површи два диелектрика), на основу граничних услова

$$\underline{H}_{x1} = \underline{H}_{x2} \qquad \underline{E}_{y1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\underline{E}_{y2}$$

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- У Декартовим координатама, прва Максвелова једначина је

$$-\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{H}_x$$

- Сва поља имају исту зависност од z-координате, кроз мултипликативни фактор $\exp(-\mathrm{j}\beta z)$, па на основу овога и граничног услова за електрично поље добијамо

$$\frac{\partial \underline{E}_{y1}}{\partial z} = -\mathrm{j}\beta \underline{E}_{y1}, \quad \frac{\partial \underline{E}_{y2}}{\partial z} = -\mathrm{j}\beta \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \underline{E}_{y1}$$

  – Одавде следи $\dfrac{\partial \underline{E}_{y1}}{\partial z} \neq \dfrac{\partial \underline{E}_{y2}}{\partial z}$

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- На основу ове релације

$$\frac{\partial \underline{E}_{y1}}{\partial z} \neq \frac{\partial \underline{E}_{y2}}{\partial z}$$

и прве Максвелове једначине

$$-\frac{\partial \underline{E}_{y}}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{H}_x$$

следи да гранични услов за магнетско поље

$$\underline{H}_{x1} = \underline{H}_{x2}$$

није задовољен на развојној површи два диелектрика

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Да би се могле изједначити тангенцијалне компоненте магнетског поља на раздвојној површи, мора се увести лонгитудијална компонента електричног поља ($\underline{E}_z$), чиме се добија ТМ тип таласа
- Прва Максвелова једначина сада постаје $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{H}_x$
  - Компонента $\underline{E}_z$ је потребна да би се компензовао дисконтинуитет функције $\partial \underline{E}_y / \partial z$ на раздвојној површи
  - Због граничних услова, компонента $\underline{E}_z$ мора бити континуална на раздвојној површи два диелектрика ($\underline{E}_{z1} = \underline{E}_{z2}$) и мора бити једнака нули на раздвојној површи диелектрика и проводника ($y = \pm d$)

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Пошто је одстојање између раздвојне површи два диелектрика и металних трака мало, промена компоненте $\underline{E}_z$ између раздвојне површи и сваке траке може се апроксимирати линеарном функцијом од y,

$$\underline{E}_z = \underline{E}_{z0}\left(1 - \frac{|y|}{d}\right), \quad |y| \le d$$

тако да је, за горњи диелектрик

$$\frac{\partial \underline{E}_{z1}}{\partial y} \approx -\frac{\underline{E}_{z0}}{d}, \quad 0 < y \le d$$

док је за доњи диелектрик

$$\frac{\partial \underline{E}_{z2}}{\partial y} \approx \frac{\underline{E}_{z0}}{d}, \quad -d \le y < 0$$

где је $\underline{E}_{z0}$ z-компонента електричног поља на раздвојној површи два диелектрика ($y = 0$)

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Полазећи од релације $\dfrac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{H}_x$ добија се

$$\underline{E}_{z0} \approx -\frac{\mathrm{j}\beta d}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)\underline{E}_{y1}$$

- Ако је учестаност довољно ниска, тада је $\beta d << 1$ и лонгитудинална компонента електричног поља ($\underline{E}_z$) је много мања од трансверзалне компоненте ($\underline{E}_y$)
  - Талас је квази-ТЕМ типа
- Са порастом учестаности, лонгитудијална компонента постаје све јача, чиме све више долази до изражаја хибридна природа таласа

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Чак и код водова са хомогеним диелектриком не могу постојати прави ТЕМ таласи уколико постоје губици у проводницима (који у пракси увек постоје)
  - Због коначне специфичне проводности, у проводницима мора постојати слабо лонгитудијално електрично поље
  - Такво поље, због граничних услова, мора постојати и у диелектрику на површи проводника, па електрично поље није чисто трансверзално
  - Код свих водова у пракси, лонгитудинална компонента електричног поља је много редова величине мања од трансверзалне компоненте, тако да се са великом тачношћу може сматрати да талас ипак јесте ТЕМ типа

Системи за вођење са нехомогеним диелектриком

- Наводимо без доказа ...
- У посебним случајевима могуће је да систем за вођење са део-по-део хомогеним диелектриком води TM или TE таласе
  - Уколико је трансверзална компонента електричног поља свуда нормална на раздвојну површ два хомогена диелектрика, а магнетско поље је паралелно тој површи, онда је талас TM типа (**као у претходном примеру**)
  - Уколико је трансверзална компонента магнетског поља свуда нормална на раздвојну површ два хомогена диелектрика, а електрично поље је паралелно тој површи, онда је талас TE типа