19M071AMK
Algoritmi metoda konačnih elemenata u inženjerstvu

Slobodan Savić
ssavic@etf.rs

https://mtt.etf.bg.ac.rs/ms/amk.htm

Uvod

Opšti pojmovi

Opšti pojmovi

Jedan od glavnih poslova inženjera i naučnika je modelovanje fizičkih fenomena.

Praktično svaki fizički fenomen u prirodi polazeći od fizičkih zakona može se opisati pomoću algebarskih, diferencijalnih i integralnih jednačina.

Samo neki od ovakvih primera su:
- Aeroastronomija,
- Biologija,
- Hemija,
- Geologija,
- Mehanika,
- Elektrotehnika,
- Elektromagnetika,
- Antene i mikrotalasi

Analitičko opisivanje fizičkih fenomena i procesa naziva se matematički model.

Matematički model fizičkog procesa polazi od pretpostavki kako sistem funkcioniše koristeći se odgovarajućim aksiomima i zakonima koji opisuju taj proces.
Matematički modeli fizičkog procesa obično su opisani vrlo složenim diferencijalnim i integralnim jednačinama primenjenim na geometrijski složenim objektima.
Kao direktna posledica toga, pre pojave računara, analizirani su vrlo jednostavni problemi za koje je bilo moguće pronaći rešenje u analitičkom (zatvorenom) obliku.

U poslednje tri decenije upotreba računara i razvoj matematičke teorije i numeričkih tehnika omogućili su rešavanje velikog broja praktičnih problema, koje nije bilo moguće rešiti ranije.

Korišćenje numeričkih metoda i računara za proračun matematičkih modela fizičkog procesa i procenu njegovih karakteristika naziva se numerička simulacija.
Jedan od primera numeričkih simulacija je i numerička elektromagnetika.

Opšti pojmovi

Numerička simulacija, na primer pomoću metoda konačnih elemenata, sama po sebi nije cilj, već pomoćno sredstvo u okviru dizajna i proizvodnje.

Postoji više razloga zašto bi inženjer i/ili naučnik trebalo da izučava numeričke metode, posebno metod konačnih elemenata, a samo neki od ovih razloga su:

1. Složenost današnjih problema

Većina fizičkih problema danas podrazumeva složene domene (i sa stanovišta geometrije i sa stanovišta materijala), gubitke i nelinearnosti koje onemogućuju pronalaženje analitičkih rešenja (rešenja u zatvorenom obliku).
Prema tome jedina moguća alternativa je pronalaženje aproksimativnih rešenja numeričkim metodama.

2. Efikasnost dizajniranja

Numerički metod uz pomoć računara može se iskoristiti za ispitivanje efekata promene različitih parametara sistema (kao što su geometrija, parametri sredine i gubici) na njegov odziv. Na ovaj način stiče se bolje razumevanje sistema i procesa koji se analizira.
U poređenju sa fizičkim eksperimentima neophodnim za podjednako razumevanje procesa i sistema, numeričke metode su značajno povoljnije, a do rezultata se obično dolazi brže.

3. Verodostojnost modela

Korišćenjem sofisticiranih numeričkih metoda i jakih računara, u matematički model je moguće uključiti najrelevantnije parametre fizičkog modela, bez potrebe za postojanjem analitičkog rešenja.

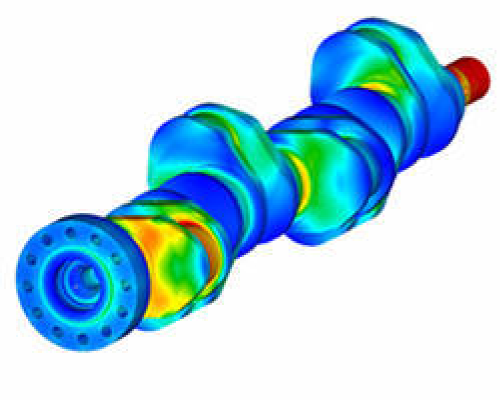
Opšti pojmovi

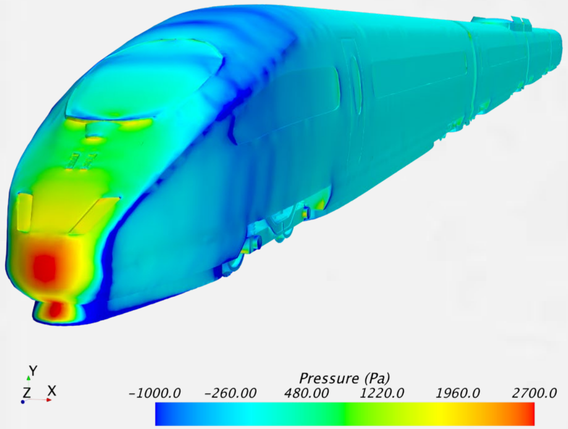
5. Sveobuhvatan metod

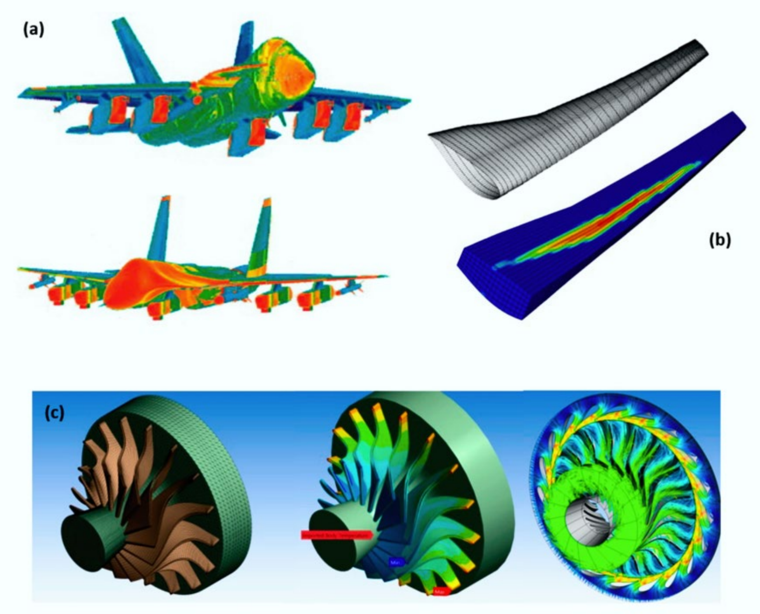
Metod konačnih elemenata jedan je od najsveobuhvatnijih numeričkih metoda dizajniran za analizu praktičnih inženjerskih problema.

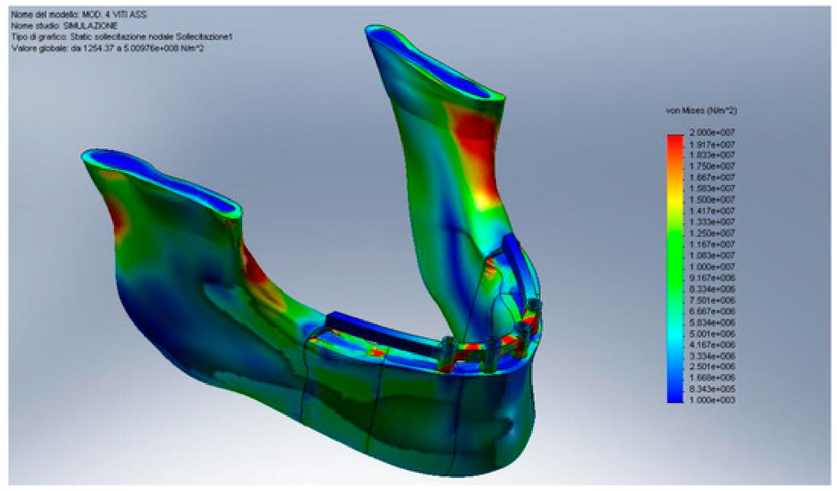
Metod konačnih elemenata danas je integralni i glavni deo mnogih grana inženjerstva i proizvodnje.

Velike industrijske grane kao što su auto industrija, aero astronomija, hemija, farmacija, naftna industrija, elektronika, telekomunikacije, kao i nove tehnologije poput nanotehnologije i biotehnologije oslanjaju se na metod konačnih elemenata za simulacije složenih problema različitih dimenzija, kao i za dizajn i proizvodnju proizvoda visoke tehnologije.









Uvod

Matematički model

Matematički model

Matematički model, u najširem smislu, može se definisati kao skup jednačina koje opisuju osnovna svojstva fizičkog sistema putem promenljivih koje opisuju taj sistem.

Matematički model fizičkog fenomena obično je zasnovan na osnovnim naučnim zakonima fizike, kao što su zakon održanja mase, zakon održanja količine kretanja, zakon održanja energije ili Maksvelove jednačine.

U nastavku je kroz jedan jednostavan primer prikazano formiranje matematičkog modela fizičkog sistema (dinamički problem).

Matematičko klatno

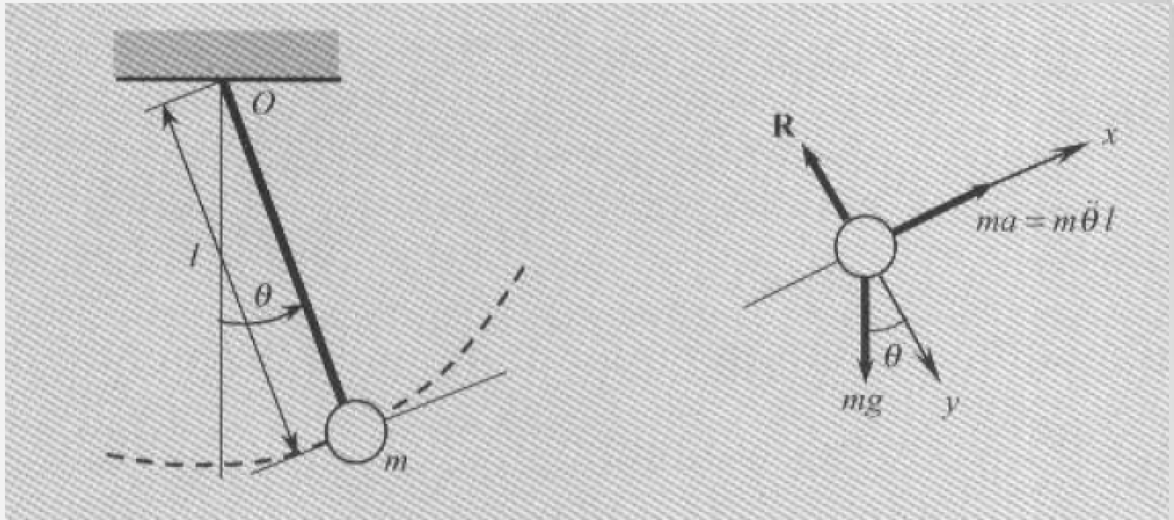


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

Matematičko klatno sastoji se od kuglice mase *m* koja se nalazi sa jedne strane šipke (ili konca) dužine *l*, a drugi kraj šipke povezan je za nepokretnu tačku *O* (oslonac).

Kako bismo konstruisali matematički model ovog sistema, moraju se uvesti određene aproksimacije u vezi sa sistemom (i za kuglicu i za šipku) koje su konzistentne sa ciljem analize.

Ako je cilj analize da se izučava linearno kretanje klatna, smatramo da je čitav sistem krut (kuglica i šipka), kao i da šipka nema masu (odnosno da je njena masa zanemariljiva u poređenju sa masom kuglice).

Takođe zanemarujemo trenje u kompletnom sistemu (u tački vešanja, *O*), kao i otpor sredine kada se kroz nju kreće kuglica odnosno šipka.

Matematičko klatno

Pod prethodnim pretpostavkama, jednačina koja određuje kretanje u ovom sistemu može se formulisati korišćenjem zakona održanja količine kretanja (odnosno drugog Njutnovog zakona), koji tvrdi, u okviru ovog primera, da je vektorska suma eksternih sila primenjenih na sistem jednaka vremenskoj promeni količine kretanja (proizvod mase i brzine) sistema, odnosno:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\mathbf{v}\right) = m\mathbf{a} \qquad (1.2.1)$$

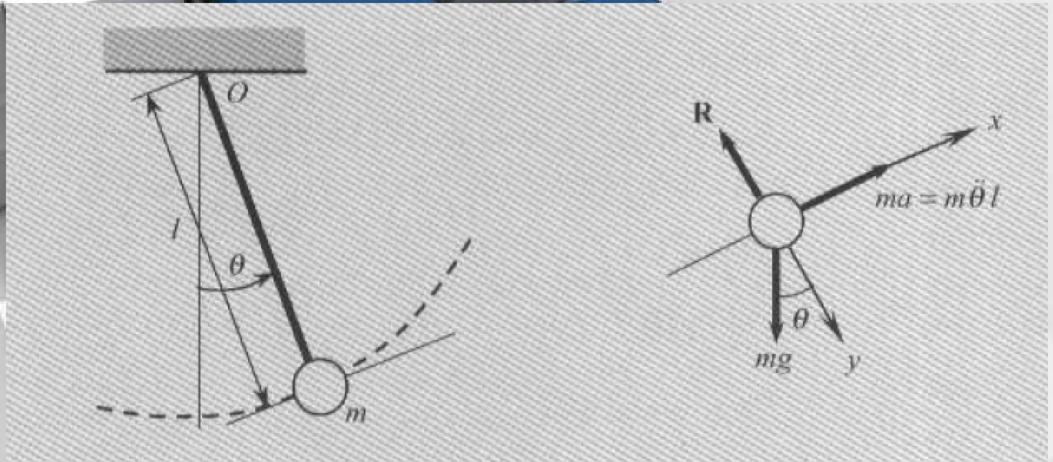


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

pri čemu je **F** vektorska suma svih sila koje deluju na sistem, *m* je masa sistema, **v** je brzina sistema, a **a** je vektor ubrzanja sistema.

Kako bismo odredili jednačinu koja opisuje ovaj sistem, postavićemo koordinatni sistem kao na slici 1.2.1.

Primenom drugog Njutnovog zakona na *x*-komponente posmatranih vektora, dobijamo:

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad (1.2.2)$$

Primetiti da su sile u pravcu *y*-ose uravnotežene. Sa jedne strane postoji gravitaciona sila i centrifugalna sila, a sa druge strane zatezna sila šipke.

pri čemu je

$$F_x = -mg\sin\theta,\; v_x = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

θ je ugao koji šipka zaklapa sa vertikalnom osom, v_x je komponenta brzine u pravcu *x*-ose, a *t* predstavlja vreme.

Matematičko klatno

Finalna jednačina koja opisuje sistem je:

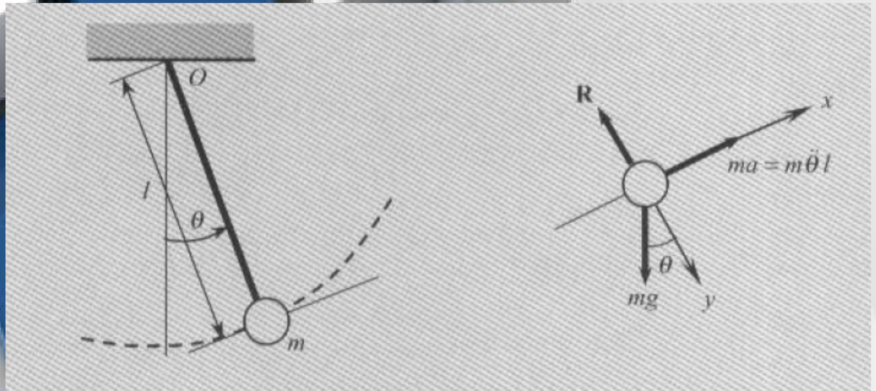


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

$$-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, \text{ odnosno } \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \quad (1.2.3)$$

Jednačina (1.2.3) je nelinearna (po θ) zbog postojanja člana $\sin\theta$.
Međutim, za male otklone (kada je θ dovoljno malo) $\sin\theta$ može se aproksimirati sa θ.

Prema tome, periodično kretanje može se opisati linearnom diferencijalnom jednačinom oblika:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (1.2.4)$$

Jednačine (1.2.3) i (1.2.4) predstavljaju, redom, matematički model nelinearnog i linearnog kretanja krutog matematičkog klatna.

Njihovo rešenje zahteva poznavanje uslova u trenutku t=0 po θ i njegovom prvom izvodu po vremenu.

Ovi uslovi poznati su pod nazivom <u>početni uslovi</u>.

Prema tome, linearni problem podrazumeva rešavanje diferencijalne jednačine (1.2.4) i odgovarajućih početnih uslova:

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0/l, \quad (1.2.5)$$

Problem opisan jednačinama (1.2.4) i (1.2.5) naziva se <u>problemom početnih vrednosti</u>.

Matematičko klatno

Linearni problem opisan jednačinama (1.2.4) i (1.2.5) može se rešiti analitički.
Opšte analitičko rešenje linearne diferencijalne jednačine oblika

$$\ddot{\theta} + \lambda^2 \theta = 0$$

je

$$\theta(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t$$

pri čemu je

$$\lambda = \sqrt{g/l}$$

a konstante *A* i *B* određene su početnim uslovima (1.2.5). Za ove konstante dobijamo

$$A = \frac{v_0}{l\lambda}, \; B = \theta_0 \quad (1.2.7)$$

a rešenje linearnog problema je

$$\theta(t) = \frac{v_0}{l\lambda} \sin \lambda t + \theta_0 \cos \lambda t \quad (1.2.8)$$

Ako se za početne uslove uzme nulta početna brzina i nenulti početni položaj (θ_0), finalno dobijamo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \lambda t \quad (1.2.9)$$

što predstavlja prostoperiodično kretanje.

Ako bismo pokušali da rešimo nelinearnu jednačinu (1.2.3) uz početne uslove (1.2.5), morali bismo da koristimo numeričku metodu, pošto nije moguće naći analitičko rešenje za ovaj problem.

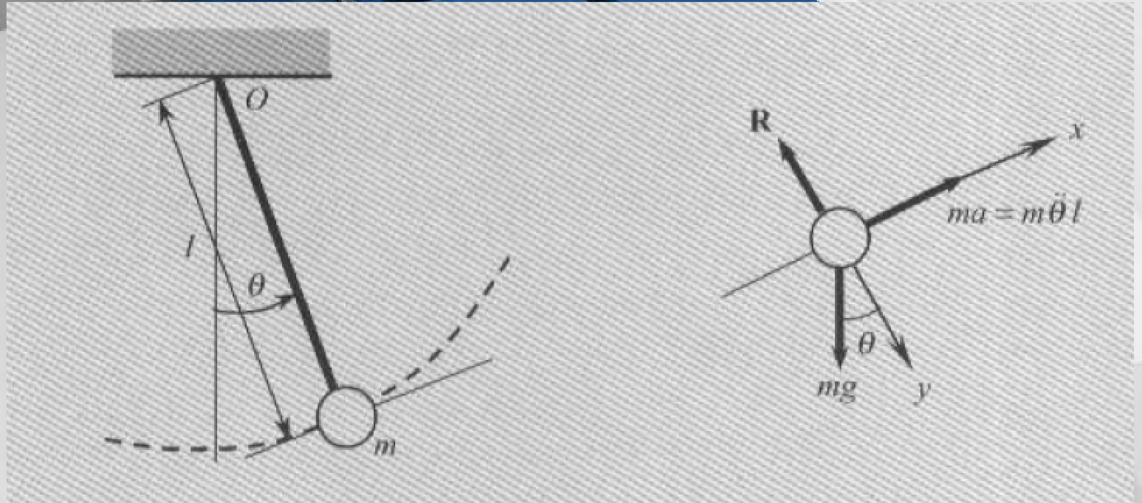


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

Uvod

Numeričke simulacije

Numerička simulacija

Iako izvođenje jednačina koje opisuju neki sistem u opštem slučaju nije preterano teško, njihovo egzaktno rešavanje obično je vrlo teško (a često i nemoguće) zbog geometrijske složenosti i složenosti parametara sredine.

U takvim slučajevima numerička analiza predstavlja alternativni (a nekada i jedini) način pronalaženja (približnih) rešenja.

Pod numeričkom simulacijom procesa ili sistema podrazumeva se rešavanje jednačina koje opisuju proces ili sistem (odnosno matematičkog modela) pomoću numeričkih metoda i računara.

Numerički metod obično transformiše diferencijalne (ili integralne) jednačine koje opisuju sistem ili proces u kontinualnom prostoru u skup algebarskih jednačina diskretnog modela koje se rešavaju pomoću računara.

Postoji veliki broj numeričkih metoda, a veliki broj njih razvijen je za rešavanje diferencijalnih jednačina.

Prilikom aproksimacije diferencijalnih jednačina diferencnim jednačinama, izvod u diferencijalnim jednačinama zamenjuje se konačnim razlikama u diferencnim jednačinama. Diferencne jednačine koriste promenljive u diskretnim tačkama prostora i trenucima vremena.

Nakon primene graničnih odnosno početnih uslova, rezultantne algebarske jednačine rešavaju se po nepoznatim promenljivim u diskretnim tačkama prostora i u diskretnim trenucima vremena.

Numerička simulacija

Prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina klasičnim varijacionim metodom, jednačina se prebacuje u ekvivalentni oblik otežanih integrala, a onda se rešenje aproksimira nad domenom od interesa u obliku linearnog razvoja pogodno izabranih funkcija aproksimacije (bazisnih funkcija) i nepoznatih koeficijenata razvoja.

Nepoznati koeficijenti razvoja određuju se tako da integralni oblik jednačine ekvivalentan originalnoj jednačini bude zadovoljen.

Razni varijacioni metodi, kao što su Ricov metod, Galerkinov metod, kolokacioni metod (*collocation method*) i metod minimalnih kvadrata (*least-squares method*) međusobno se razlikuju po izboru integralne forme, težinskih funkcija i/ili funkcija aproksimacije.

Klasični varijacioni metodi, koji su zaista *meshless* metodi, su moćni metodi koji obezbeđuju globalno kontinualno rešenje.
Sa druge strane, njihova mana je u tome što je za probleme proizvoljne geometrije i proizvoljnih parametara sredine nekada izuzetno teško konstruisati funkcije bazisa.

Sledeći numerički primer (matematičko klatno) trebalo bi da bude jednostavan prikaz metoda konačnih razlika.

Matematičko klatno

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0, \quad (1.2.4)$$

Posmatraćemo numeričko rešavanje jednačine (1.2.4) koja opisuje linearno kretanje matematičkog klatna.
Kako bismo uveli metod konačnih razlika, posmatrajmo diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(u,t), \quad (1.3.1)$$

pri čemu je f poznata funkcija nepoznate funkcije u i vremena t. Jednačinu (1.3.1) potrebno je rešiti za $t>0$ uz zadovoljenje početnog uslova $u(t=0)=u_0$.

Aproksimiraćemo izvod u trenutku t_i kao

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_i}\approx\frac{u(t_{i+1})-u(t_i)}{t_{i+1}-t_i}. \quad (1.3.2)$$

Zamenom (1.3.2) u (1.3.1) u trenutku $t=t_i$ dobijamo

$$u_{i+1}=u_i+\Delta t\, f(u_i,t_i), \quad u_i=u(t=t_i), \quad \Delta t=t_{i+1}-t_i. \quad (1.3.3)$$

Primetiti da smo zamenili izvod u trenutku $t=t_i$ po definiciji, izuzev što nismo stavili da $\Delta t\equiv t_{i+1}-t_i\to 0$; pa je samim time reč o aproksimaciji. Za zadovoljavajuće male vrednosti Δt , očekujemo da će aproksimacija imati zadovoljavajuće malu grešku.

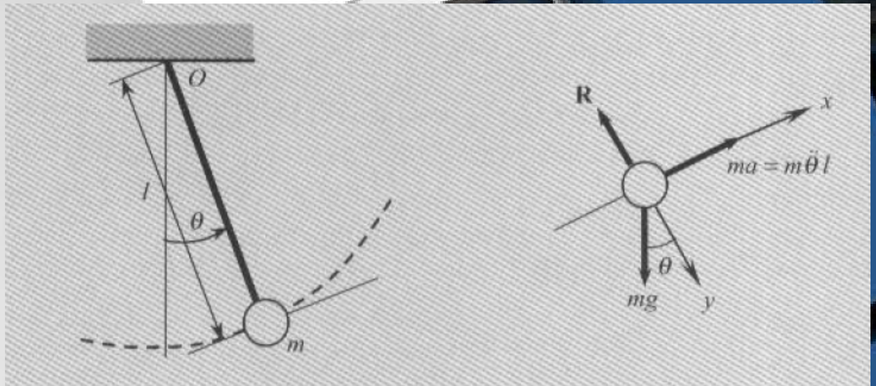


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

Matematičko klatno

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(t=0) = v_0/l, \quad (1.2.5)$$

$$\frac{du}{dt} = f(u,t). \quad (1.3.1)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\; f(u_i, t_i), u_i = u(t = t_i), \Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (1.3.3)$$

Jednačina (1.3.3) može se rešiti polazeći od poznate vrednosti u_0 funkcije $u(t)$ u trenutku t=0 za $u_1=u(t_1)=u(\Delta t)$.

Ovaj metod poznat je kao Ojlerova eksplicitna šema (*Euler's explicit scheme*) odnosno Runda-Kuta metod prvog reda (*first-order Runda-Kutta method*), poznat i pod nazivom diferencna šema unapred (*forward difference scheme*).

Postoje i diferencne šeme višeg reda koje su tačnije od Ojlerove eksplicitne šeme.

Na ovaj način konvertovali smo standardnu diferencijalnu jednačinu (1.3.1) u algebarsku jednačinu (1.3.3) koju je potrebno proračunati u različitim trenucima vremena kako bi se odredila funkcija $u(t)$.

Primenimo Ojlerovu eksplicitnu šemu na diferencijalnu jednačinu drugog reda (1.2.4) uz zadovoljenje graničnih uslova (1.2.5).

Kako bismo primenili ranije opisanu proceduru na diferencijalnu jednačinu drugog reda, jednačinu (1.2.4) napisaćemo kao par spregnutih (jedna se ne može rešiti bez druge) diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\frac{d\theta}{dt} = v/l, \quad \frac{dv}{dt} = -l\lambda^2\theta, \quad (1.3.4)$$

pri čemu je $\lambda^2=g/l$.

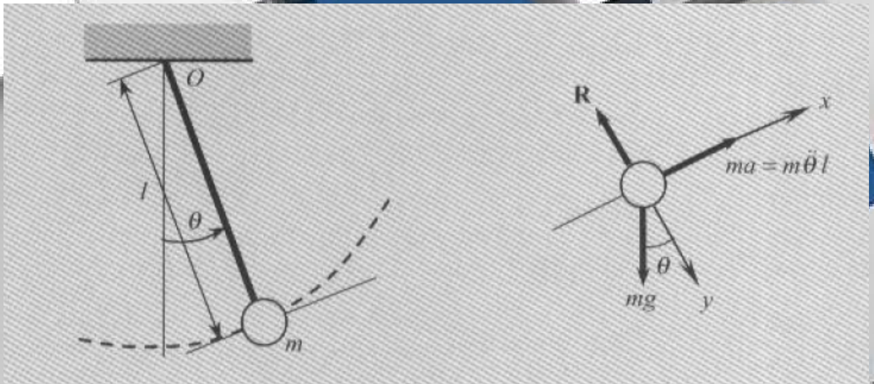


Figure 1.2.1 Simple pendulum.

Matematičko klatno

$$\theta(t=0)=\theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(t=0)=v_0, \quad (1.2.5)$$

$$u_{i+1}=u_i+\Delta t\ f(u_i,t_i),\ u_i=u(t=t_i),\ \Delta t=t_{i+1}-t_i \quad (1.3.3)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=v/l, \quad \frac{dv}{dt}=-l\lambda^2\theta \quad (1.3.4)$$

Primenom šeme iz jednačine (1.3.3) na jednačine (1.3.4) dobijamo

$$\theta_{i+1}=\theta_i+\Delta t\, v_i/l; \quad v_{i+1}=v_i-\Delta t l\lambda^2\theta_i \quad (1.3.5)$$

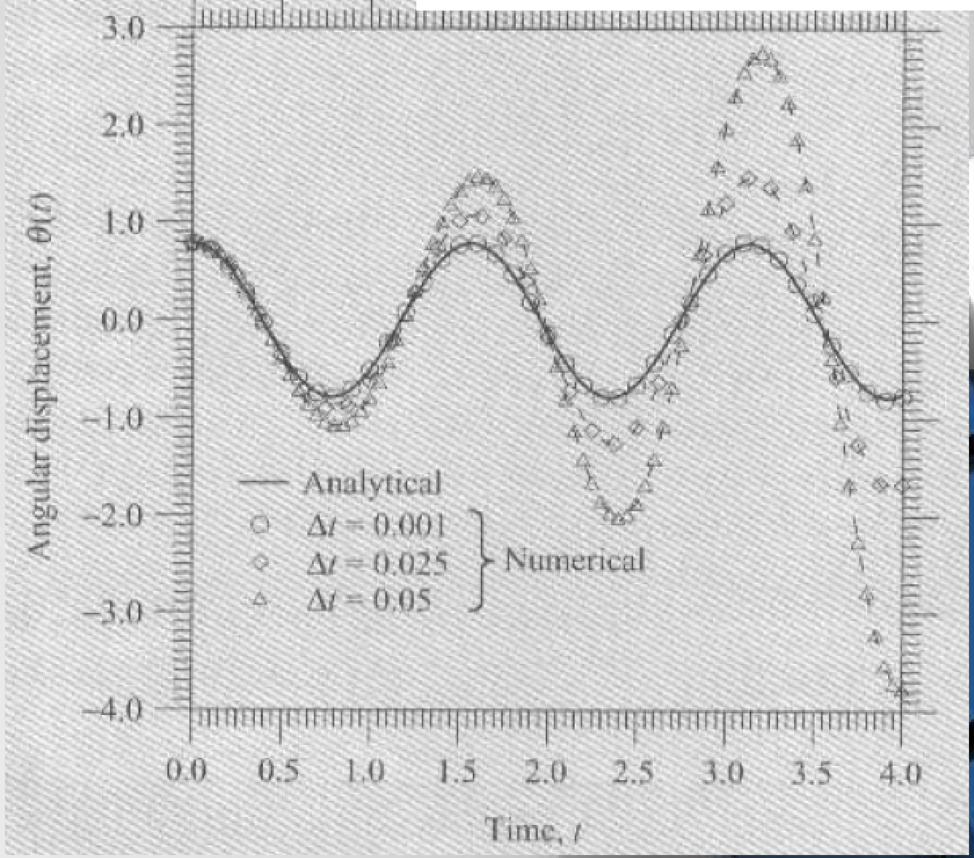
Izrazi za θ_{i+1} i v_{i+1} u jednačini (1.3.5) dobijaju se na osnovu poznatog rešenja u prethodnom trenutku (θ_i , v_i), a onda se proces ponavlja za sledeći trenutak.

Algoritam otpočinje u trenutku t=0 i od poznatih vrednosti (θ_0 , v_0)

Numeričko rešenje jednačina (1.3.5) prikazano je na slici za tri različita koraka u vremenu (Δt) zajedno sa analitičkim rešenjem jednačine (1.2.9)

Tačnost numeričkog rešenja zavisi od veličine vremenskog koraka, a rešenje je tačnije što je vremenski korak manji (do određene granice!!!).

Za velike vremenske korake, rešenje divergira u odnosu na tačno rešenje.



Uvod

Metod konačnih elemenata

Osnovne ideje

Metod konačnih elemenata je numerički metod poput metoda konačnih razlika, ali koji je generalniji i moćniji u rešavanju svakodnevnih praktičnih problema koji uključuju složene fizičke, geometrijske i/ili granične uslove.

U metodu konačnih elemenata, domen od interesa posmatra se kao kolokacija poddomena, a u okviru svakog poddomena jednačine koje opisuju problem aproksimirane su nekom od standardnih varijacionih metoda.

Jedan od razloga podele domena na poddomene je jednostavnija aproksimacija složenih funkcija kao kolokacije jednostavnijih funkcija (obično polinoma), kao što je prikazano na slici.

Naravno, svaki individualni segment (poddomen) rešenja trebalo bi da se uklapa sa susednim segmentima (poddomenima) u smislu da bude zadovoljena kontinualnost posmatrane funkcije i izvoda do željenog reda u tačkama spoja.

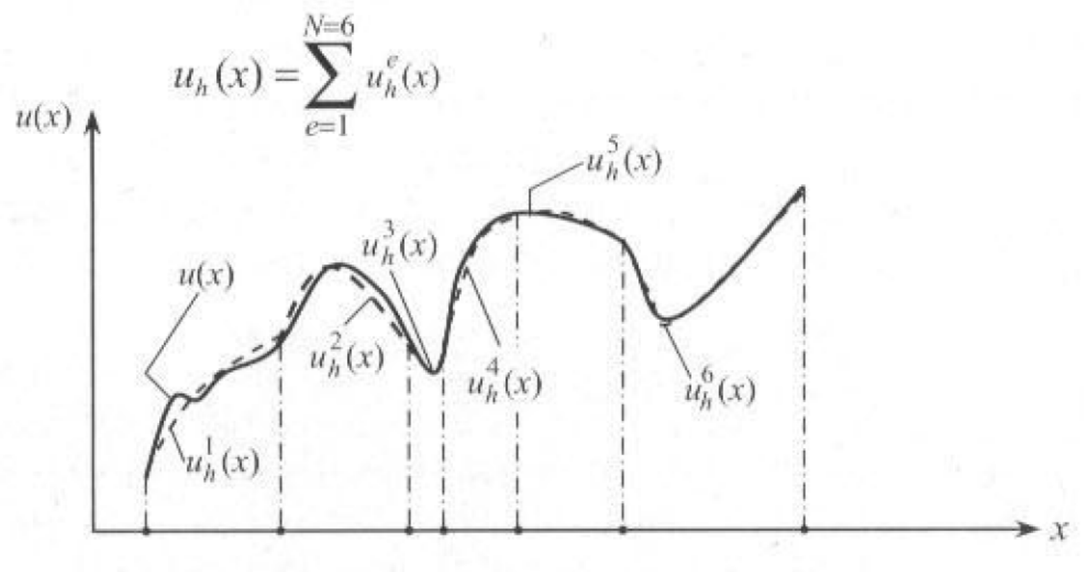


Figure 1.4.1 Piecewise approximation of a function.

Osnovna svojstva

Metod konačnih elemenat poseduje tri svojstva koja mu daju prednost u odnosu na ostale numeričke metode.

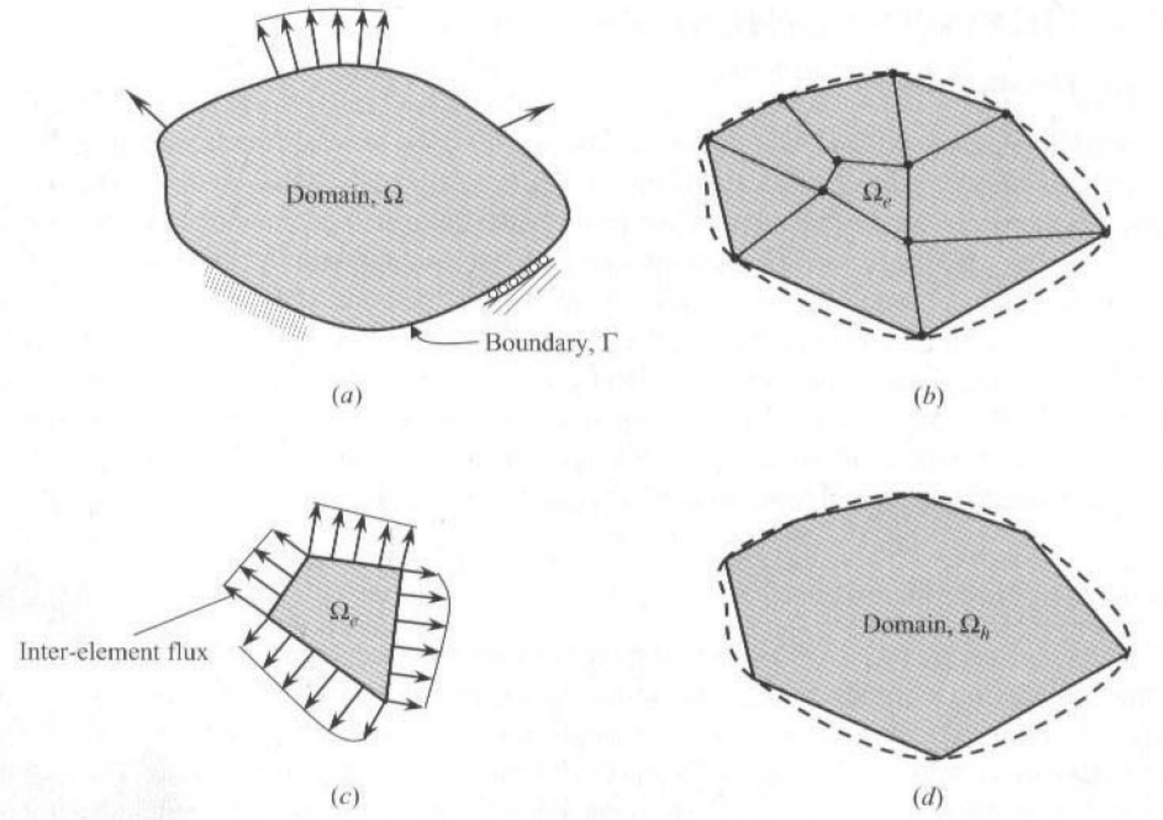


Figure 1.4.2 Representation of a two-dimensional domain by a collection of triangles and quadrilaterals.

Konačni elementi

Geometrijski složen domen problema (Ω), poput onog sa slike 1.4.2(a), predstavljen je kao kolokacija geometrijski jednostavnijih poddomena, nazvani konačni elementi. Svaki konačni element Ω_e (Slika 1.4.2 (b)) može se posmatrati kao nezavisan.
Pod "domen" ovde se podrazumeva geometrijski deo prostora nad kojim se rešavaju jednačine.

Pojedinačne jednačine za konačne elemente

Nad svakim konačnim elementom algebarske jednačine koje povezuju veličine od interesa razvijene su polazeći od jednačine koja opisuje kompletan problem.

Jednačine veza i formiranje globalnog sistema

Polazeći od jednačina za svaki konačni element formira se globalni sistem jednačina (elementi se vraćaju u svoj originalni položaj u ukupnom domenu) kao što je prikazano na slici 1.4.2(d).
U okviru ove procedure neophodno je zadovoljiti i određene jednačine na granici između dva konačna elementa.

Aproksimacije

Osnove ideje i deo terminologije metoda konačnih elemenata uvedeni su kroz sledeći jednostavan primer.

Ideja ovog primera je sagledavanje osnovnih koraka u metodu konačnih elemenata, a akcenat nije na efikasnom rešavanju samog problema.

Aproksimacije

Aproksimacije se pojavljuju u metodu konačnih elemenata na nekoliko mesta.

Geometrija

Podela kompletnog domena na konačne elemente ne mora biti egzaktna, odnosno skup pojedinačnih konačnih elemenata Ω_e ne mora odgovarati originalnom domenu Ω. Ovo unosi greške u geometrijsko modelovanje domena.

Nepoznata funkcija

Obično se nepoznate veličine (u) aproksimiraju na osnovu jednostavne ideje da se svaka kontinualna funkcija može predstaviti kao linearna kombinacija poznatih funkcija ϕ_i i nepoznatih koeficijenata c_i kao

$$u \approx u_h = \sum c_i \phi_i .$$

Nepoznati koeficijenti c_i dobijaju se nakon zadovoljenja jednačine koja opisuje problem u smislu otežane integralne forme, za svaki element posebno.
Funkcije aproksimacije ϕ_i obično su polinomi, a često se razvijaju i polazeći od koncepata iz teorije interpolacije.
Zbog toga se nazivaju interpolacionim funkcijama, a podjednako odomaćen naziv je i funkcije bazisa.
Prema tome, greške u ovoj fazi uvode se na dva načina: preko aproksimacije nepoznate funkcije (u) i prilikom (numeričke) integracije u okviru otežane integralne forme.

Rešavanje sistema jednačina

Finalni izvor grešaka je numeričko rešavanje sistema linearnih jednačina.

Neke od nabrojanih grešaka mogu biti jednake nuli.

Kada su sve nabrojane greške jednake nuli, dobijamo egzaktno (tačno) rešenje (što najčešće nije slučaj).

Proračun obima kruga

Pretpostavimo da nam je cilj da odredimo obim kruga poluprečnika R, ali da nam formula za obim $O=2\pi R$ nije poznata.
Obim kruga odredićemo tako što ćemo krug aproksimirati pravim segmentima (jednake dužine), a onda odrediti ukupnu dužinu pravih segmenata.

Tri osnovna dela metode konačnih elemenata u ovom primeru su:

1. Podela kruga na kolokaciju pravih segmenata. Da bismo dobili tačno rešenje potreban nam je beskonačan broj ovih segmenata. U suprotnom, obim proračunat na ovakav način uneće određenu grešku.

2. Određivanje jednačine koja opisuje jedan element (segment), kao što ćemo videti, u ovom primeru je egzaktna.

3. Sklapanje finalnog rešenja predstavlja sabiranje dužina posebnih elemenata. U posmatranom primeru i ova procedura biće egzaktna.

Proračun obima kruga

Iako je posmatrani primer trivijalan, on jasno ilustruje nekoliko (ali ne sve!) ideje i korake prilikom analize konkretnog problema metodom konačnih elemenata. U okviru ovog primera uvešćemo i neke termine koji se koriste u metodi konačnih elemenata.

Diskretizacija konačnim elementima

Kao prvi korak, kompletan domen (kružnica) predstavljen je kao kolokacija konačnog broja *n* poddomena, odnosno pravolinijskih segmenata (Slika 1.4.3(b)).
Ova procedura naziva se diskretizacija domena.
Svaki poddomen (linijski segment) naziva se element. Skup svih poddomena naziva se meš konačnih elemenata (*finite element mesh*).
Elementi su međusobno povezani u tačkama koje se nazivaju čvorovi, odnosno nodovi (*nodes*).
Na slici 1.4.3(c) prikazan je primer za n=5.
Linijski elementi mogu biti različitih dužina. Kada su svi elementi istih dužina, za meš se kaže da je uniforman; u suprotnom za meš se kaže da je neuniforman.

Jednačine elemenata

Posmatrani element (linijski segment, Ω_e) je izolovan i njegova nepoznata veličina (dužina) proračunava se nezavisno. Ako sa h_e označimo dužinu elementa Ω_e u mešu, ona iznosi

$$h_e = 2R\sin\frac{\theta_e}{2}, \quad (1.4.1)$$

pri čemu je R poluprečnik kruga, a $\theta_e<\pi$ je ugao pod kojim se element vidi iz centra kruga.
Prethodna jednačina naziva se jednačina elementa (*element equation*).

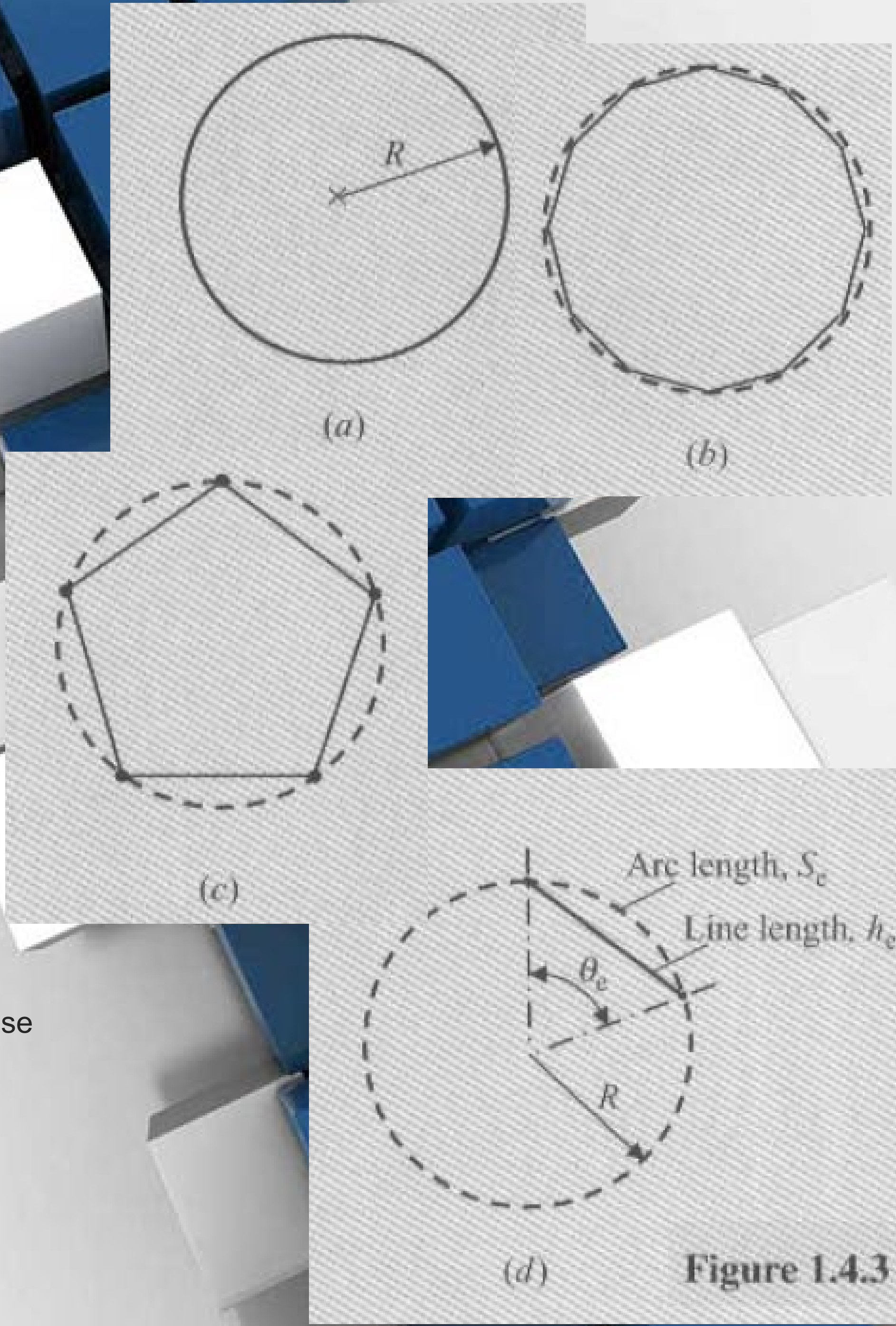


Figure 1.4.3

Proračun obima kruga

Sklapanje jednačina elemenata i rešenja

Aproksimativni obim kruga dobija se na osnovu sklapanja svojstava elemenata na smislen način. Ovaj proces naziva se sklapanje (asembliranje) jednačina elemenata.
U posmatranom primeru zasnovano je na jednostavnoj ideji da je ukupna dužina poligona Ω_h (skupa elemenata) jednaka sumi dužina pojedinačnih elemenata:

$$O_n = \sum_{e=1}^{n} h_e . \quad (1.4.2)$$

Dužina O_n predstavlja aproksimaciju stvarnog obima, O. Ako je meš uniforman, odnosno ako je h_e isto za svaki element u mešu, tada je $\theta_e = 2\pi/n$, i imamo

$$O_n = n\left(2R\sin\frac{\pi}{n}\right) \quad (1.4.3)$$

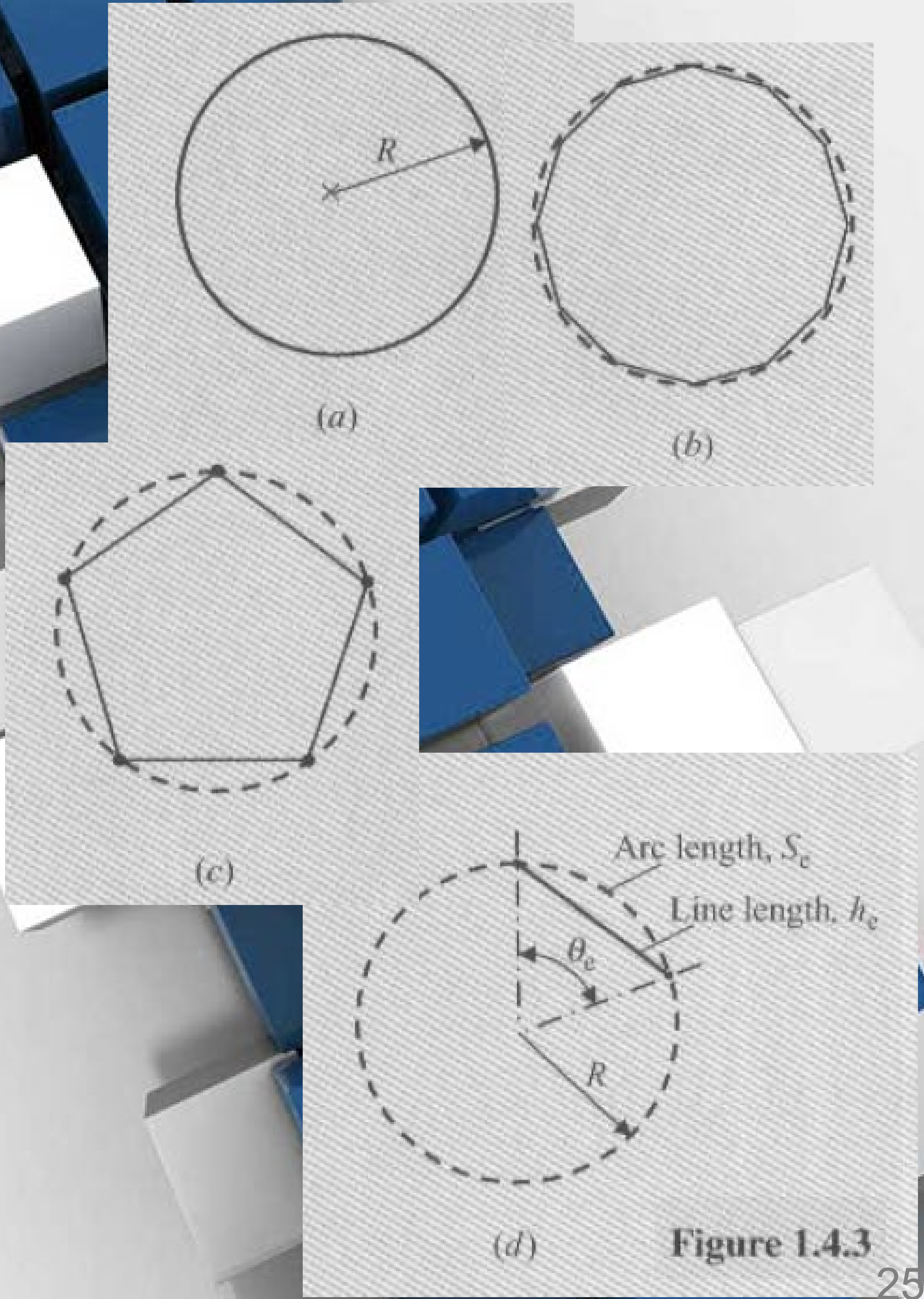


Figure 1.4.3

Proračun obima kruga

Konvergencija i procena greške

Za ovaj jednostavan primer mi znamo egzaktno rešenje: $O=2\pi R$. Na osnovu toga možemo da procenimo grešku aproksimacije i da pokažemo da aproksimativno rešenje O_n konvergira ka tačnom O kada $n\to\infty$.
Posmatrajmo jedan element Ω_e. Greška aproksimacije jednaka je razlici između dužine kružnog luka i dužine linijskog segmenta sa slike 1.4.3(d)

$$E_e = \left|S_e - h_e\right| \quad (1.4.4)$$

odnosno jednaka je

$$E_e = R\left(\frac{2\pi}{n} - 2\sin\frac{\pi}{n}\right). \quad (1.4.5)$$

Ukupna greška, koja se naziva <u>globalna greška</u> (*<u>global error</u>*) dobija se kao suma lokalnih grešaka (1.4.5) i iznosi

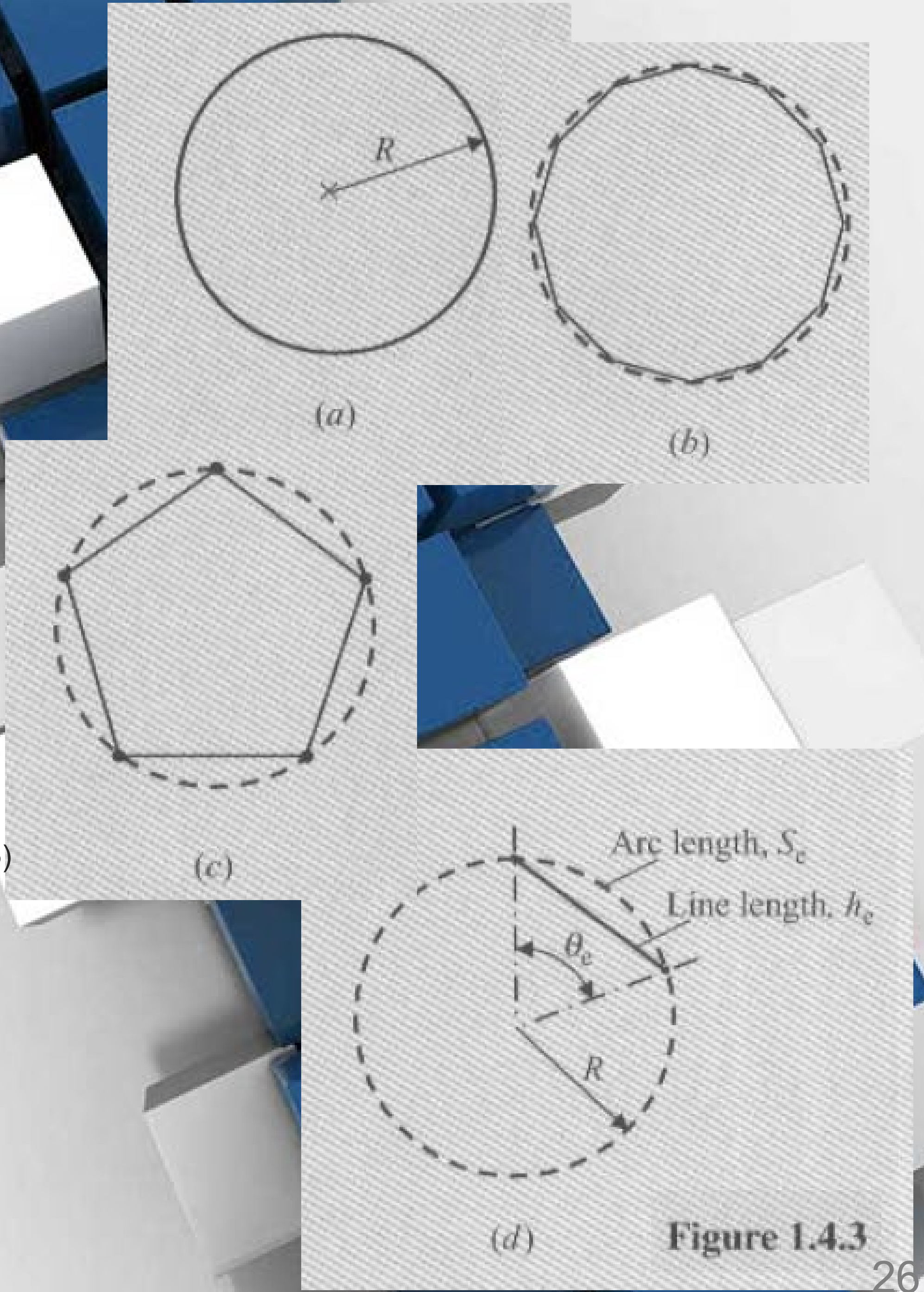
$$E = nE_e = 2R\left(\pi - n\sin\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi R - O_n = O - O_n \quad (1.4.5)$$

Pošto važi

$$\lim_{x\to 0}\sin x = x$$

dobijamo da

$$\lim_{n\to\infty} O_n = O \qquad \lim_{n\to\infty} E_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} E = 0$$



Aproksimacija deo po deo

Prethodni primer ilustruje kako se aproksimacija deo po deo (*piecewise approximation*) može iskoristiti za aproksimaciju neregularnih geometrijskih oblika i kako se pomoću takve aproksimacije mogu izračunati željeni parametri.
Prema tome, podela složenih geometrija na jednostavnije delove koji omogućavaju jednostavniji proračun željenih veličina predstavlja prirodan i praktičan izbor.

Ova ideja može se proširiti na aproksimaciju funkcija koje predstavljaju neku fizičku veličinu različitu od geometrijskog oblika.

Kao primer, promena temperature u dvodimenzionom domenu može se posmatrati kao zakrivljena površ koja se može aproksimirati na delovima domena (poddomenima, elementima) polinomima željenog reda. Na primer, zakrivljena površ nad trougaonim poddomenom može se aproksimirati ravnom porvši, kao što je prikazano na slici 1.4.5. Ova ideja predstavlja osnovu aproksimacije u metodi konačnih elemenata.

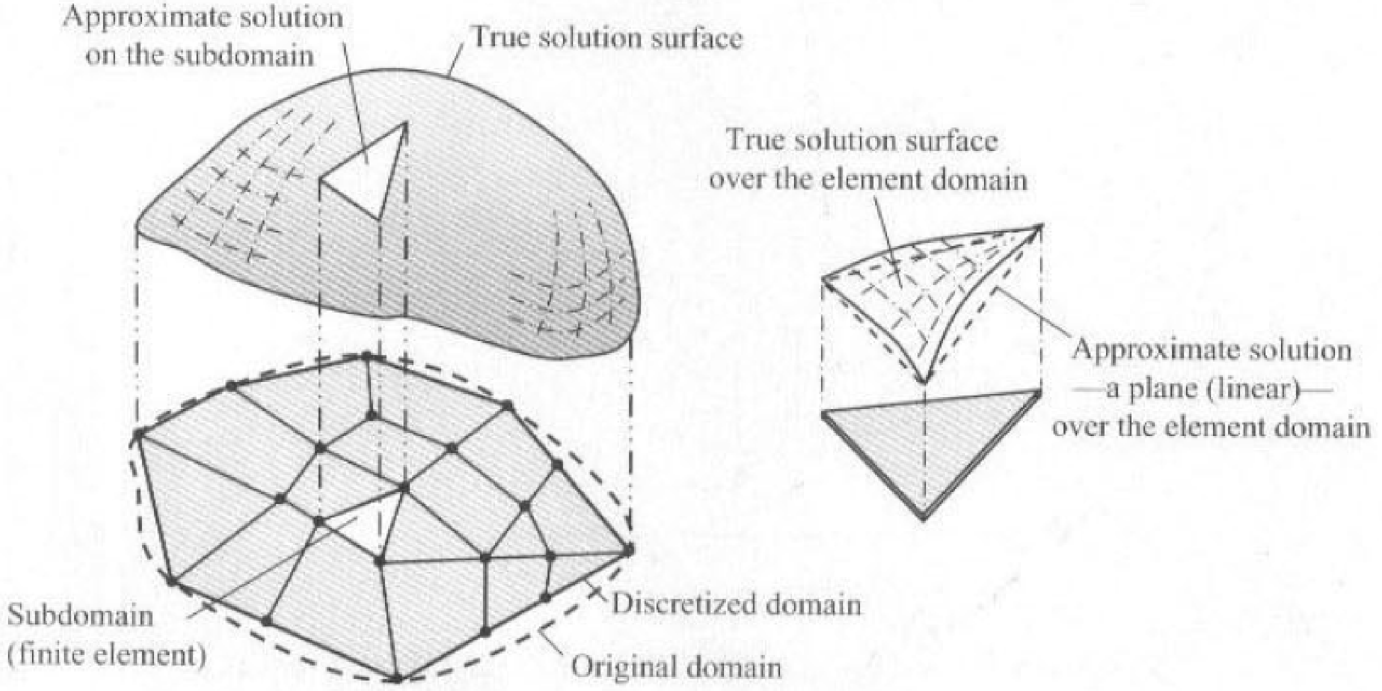


Figure 1.4.5 Approximation of a curved surface by a planar surface.

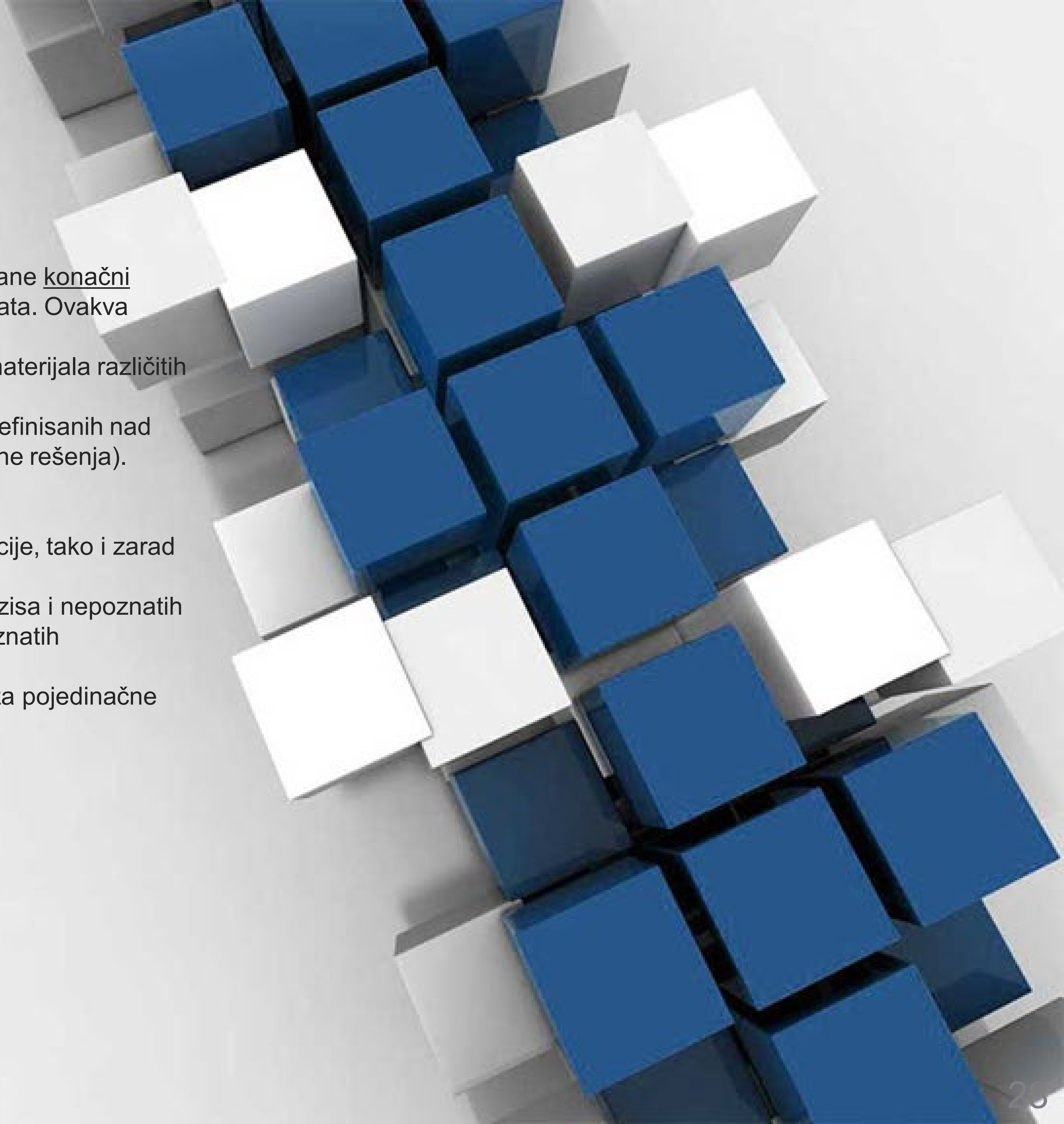
Neke napomene

U metodu konačnih elemenata posmatrani domen deli se na poddomene, nazvane konačni elementi, a aproksimativno rešenje problema konstruiše se za svaki od elemenata. Ovakva podela originalnog domena na delove ima dve prednosti:

1. Omogućava tačno opisivanje složenih geometrija i jednostavno opisivanje materijala različitih svojstava.
2. Omogućava jednostavno predstavljanje ukupnog rešenja pomoću funkcija definisanih nad pojedinačnim elementima koji opisuju lokalne efekte (na primer, brze promene rešenja).

Tri osnovna koraka u okviru metoda konačnih elemenata su:

1. Podela kompletnog domena na delove (kako zarad geometrijske aproksimacije, tako i zarad aproksimacije nepoznate funkcije).
2. Nad svakim delom traži se rešenje u obliku linearne kombinacije funkcije bazisa i nepoznatih koeficijenata, na osnovu čega se formiraju algebarske relacije između nepoznatih koeficijenata za svaki od elemenata.
3. Formiranje kompletnog rešenja na osnovu algebarskih jednačina dobijenih za pojedinačne elemente.



Neke napomene

Iako prethodi primer ilustruje osnovne korake u metodi konačnih elemenata, postoji i određen broj koraka koji nisu postojali ili koji nisu očigledni iz tog primera. Neki od njih su:

1. Geometrija domena, u zavisnosti od svog oblika, može se diskretizovati u meš koji sadrži više od jednog tipa elemenata (i po obliku i po redu aproksimacije). Na primer, prilikom prostorne aproksimacije nepravilnog domena, može se koristiti kombinacija pravougaonika i trouglova. Međutim na spojevima elemenata, obično je potrebno zadovoljiti kontinuitet rešenja.
2. Ako se koristi više od jednog tipa elementa, za svaki od tih tipova elemenata nezavisno se razvijaju jednačine koje opisuju posmatrani fenomen.
3. Jednačine koje opisuju problem u metodu konačnih elemenata obično su diferencijalne jednačine, a u većini slučajeva nije moguće pronaći egzaktno rešenje iz dva razloga. Prvi je što za njih ne postoji rešenje u zatvorenom obliku. Na ovom mestu na scenu stupa varijacioni metod. Drugi razlog je što diskretizovane jednačine dobijene varijacionim metodom ne mogu se rešavati nezavisno, zbog toga što prilikom formiranja globalnog rešenja moraju da se zadovolje određeni granični uslovi, odnosno početni uslovi.
4. Asembliranje finalnog sistema zasniva se na ideji da rešenje (a možda i njegovi izvodi za jednačine višeg reda) mora biti kontinualno na spojevima dva elementa.
5. Finalni sistem jednačina dobija se tek nakon zadovoljenja graničnih uslova na spojevima konačnih elemenata.
6. Postoje tri izvora grešaka prilikom rešavanja problema metodom konačnih elemenata:
   (a) greške u vezi sa aproksimacijom domena;
   (b) greške u vezi sa aproksimacijom rešenja; i
   (c) greške u vezi sa numeričkim proračunima (numerička integracija, greške zaokruživanja, greške invertovanja matrice, greške rešavanje sistema jednačina). Procena ovih grešaka, u opštem slučaju, nije jednostavan zadatak. Međutim, pod određenim okolnostima, ove greške se mogu proceniti za elemente kao i za kompletan problem.
7. Tačnost i konvergencija rešenja dobijenog metodom konačnih elemenata zavisi od direfencijalne jednačine, integralne forme koja se rešava, kao i korišćenih elemenata. Tačnost se odnosi na razliku između egzaktnog rešenja i rešenja dobijenog metodom konačnih elemenata. Konvergencija se odnosi na tok tačnosti sa porastom broja elemenata i/ili stepena aproksimacije.

Neke napomene

8. Za vremenski zavisne probleme, obično se koristi formulacija u dva koraka. U prvom koraku diferencijalne jednačine se aproksimiraju metodom konačnih elemenata kako bi se dobio skup diferencijalnih jednačina u vremenu. U drugom koraku, diferencijalne jednačine u vremenu rešavaju se egzaktno ili se dalje aproksimiraju pomoću varijacionog metoda ili metoda konačnih razlika, kako bi se dobio sistem algebarskih jednačina, koji se zatim rešava nekom od standardnih procedura.
9. Bezelementni metodi (*element-free methods*) ne zahtevaju asembliranje (zato što ne postoje elementi), a ovakvi elementi u stalnom su razvoju. Takvi metodi imaju određen skup prednosti i nedostataka u odnosu na standardni metod konačnih elemenata.

U okviru ovog kursa metodom konačnih elemenata rešavaće se opšti linearni problemi. Problemi će biti opisani odgovarajućom diferencijalnom jednačinom (i graničnim uslovima). Na ovaj način studenti bi trebalo da razumeju opštost metoda konačnih elemenata, bez obzira na užu oblast kojom će se baviti. Ovo takođe omogućava studentima da uvide matematičke strukture zajedničke za različite fizičke probleme, a samim tim da steknu dodatno razumevanje različitih inženjerskih problema.

Rezime

Rezime

Naučnici i inženjeri razvijaju konceptualne i matematičke modele fenomena i sistema koje žele da razumeju.
Razumevanje ovih sistema i fenomena može se iskoristiti za razvoj novih i unapređenje postojećih sistema koji doprinose komforu i kvalitetu života.
Matematički modeli razvijaju se pomoću aksioma ili fizičkih zakona koji opisuju fenomen.
Matematički modeli sastoje se od algebarskih, diferencijalnih i/ili integralnih jednačina, koje je obično vrlo teško rešiti, pa je neophodno korišćenje numeričkih tehnika.

Prilikom numeričkog rešavanja fizičkog procesa, koriste se numerički model i računar kako bi se proračunao matematički model procesa.
Metod konačnih elemenata je moćan numerički metod za rešavanje algebarskih, diferencijalnih i integralnih jednačina.

Metod konačnih elemenata poseduje sledeća tri svojstva:

1. Domen problema predstavlja se kao kolokacija jednostavnijih poddomena, nazvanih konačni elementi. Kolokacija konačnih elemenata naziva se meš konačnih elemenata.
2. Nad svakim elementom fizički proces je aproksimiran funkcijama željenog tipa (polinomi i slično), a formiraju se algebarske jednačine koje povezuju fizičke veličine u određenom broju tačaka, koji se nazivaju čvorovi, odnosno nodovi.
3. Jednačine elemenata povezuju se pomoću svojstava kontinuiteta fizičkih veličina.