

1 Метод коначних елемената у једној димензији

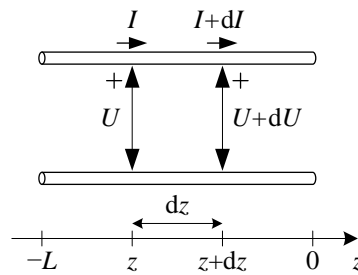
1 Увод

У овом поглављу уводи се метод коначних елемената помоћу једноставног једнодимензионог примера. Елементарни приступ приказан у овом поглављу касније се може генерализовати и на сложеније вишедимензионе случајеве.

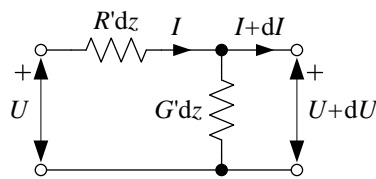
Проблем који ћемо разматрати је одређивање расподеле напона и струје дуж вода са губицима. Овај једноставан проблем погодан је за увођење метода коначних елемената, а може се решити и аналитички, па се тачност добијеног нумеричког решења лако може проверити.

2 Двожични вод

Посматрајмо двојични вод са губицима, приказан на слици 1.1(a). Сматраћемо да у проводницима вода и диелектрику постоје губици, али да се подужна индуктивност и капацитивност вода могу занемарити, односно да је радна учестаност довољно ниска. Због постојања подужне отпорности, дуж вода ће постојати пад напона, а због губитака у диелектрику, дуж вода ће постојати пад струје. Сматраћемо да се на почетку ($z = -L$) вод напаја из идеалног напонског генератора електромоторне силе E_0 , а да је на крају затворен отпорником велике отпорности, односно да је на другом крају вод практично отворен. Задатак је да се дуж вода одреди напон. На основу тог решења лако се може одредити и струја.



(a)



(б)

Слика 1.1.

Како бисмо решили овај проблем аналитички (у затвореном облику), посматрајмо кратак сегмент вода дужине dz , као што је приказано на слици 1.1(a). Губици у проводницима могу се описати подужном отпорности R' , а губици у диелектрику могу се описати подужном проводности G' , као што је приказано на слици 1.1(б). Укупна отпорност (оба) проводника сегмента вода дужине dz је $R'dz$, а укупна проводност између проводника овог сегмента је $G'dz$. Пишући једначине по првом и другом Кирхофовом закону за мрежу са слике 1.1(б) одређујемо изразе за промену напона и струје на крајевима овог сегмента.

$$dU = -IR'dz \text{ и} \quad (2.1)$$

$$dI = -(U + dU)G'dz. \quad (2.2)$$

Другачије написано ове једначине постају

$$\frac{dU}{dz} = -IR' \text{ и} \quad (2.3)$$

$$\frac{dI}{dz} = -(U + dU)G' \approx -UG', \quad (2.4)$$

при чему је у другом изразу dU могуће занемарити¹ у односу на U ако се dz узме довољно мало. Не губећи на општости, узмимо да су референтни смерови напона и струје такви да је $U, I > 0$. За вод са губицима, дуж вода интензитети напона и струје морају опадати, односно први извод напона и струје по z мора бити негативан, што је у складу са једначинама (2.3) и (2.4).

Диференцирањем претходна два израза по z добијамо

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -R' \frac{dI}{dz} \text{ и} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2I}{dz^2} = -G' \frac{dU}{dz}, \quad (2.6)$$

а након замене израза (2.3) и (2.4) у изразе (2.5) и (2.6), једначине (2.5) и (2.6) могу се свести на једначине са једном непознатом

$$\frac{d^2U}{dz^2} = R'G'U \text{ и} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2I}{dz^2} = R'G'I. \quad (2.8)$$

На основу овога закључујемо да су и струја и напон одређени истим диференцијалним једначинама, па и решења за напон и струју морају бити истог облика. Да бисмо одредили решења за напон и струју, осим једначина (2.5) и (2.6), односно једначина (2.7) и (2.8), решења морају да задовољавају и одговарајуће граничне услове. На почетку вода ($z = -L$) напон је одређен електромоторном силом идеалног напонског генератора којим се напаја вод, а како смо изабрали да је та електромоторна сила једнака E_0 , први гранични услов постаје

$$U|_{z=-L} = E_0. \quad (2.9)$$

На другом крају вода, на коме је вод отворен, мора важити да је струја једнака нули, односно мора да важи $I|_{z=0} = 0$, а на основу (2.3) овај гранични услов може се написати и преко напона као

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.10)$$

Гранични услови (2.9) и (2.10) довољни су за решавање диференцијалне једначине (2.7) по напону. Пошто је у питању диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима, њено решење мора бити облика

$$U = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}, \quad (2.11)$$

при чему су A и B коефицијенти који се одређују помоћу граничних услова (2.9) и (2.10). Заменом израза (2.11) у (2.7) добијамо

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \gamma^2 (Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}) = R'G'U = R'G'(Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}). \quad (2.12)$$

Да би једначина (2.12) била задовољена, мора да важи $\gamma^2 = R'G'$, односно² $\gamma = \sqrt{R'G'}$. Према томе, опште решење за напон U постаје

$$U = Ae^{-\sqrt{R'G'}z} + Be^{\sqrt{R'G'}z}. \quad (2.13)$$

¹ До истог израза би се директно дошло ако би се L -полућелија са слике 1.1(б) нацртала тако да G' буде на страни улазног напона U .

² Друго могуће решење $\gamma = -\sqrt{R'G'}$ нећемо посебно разматрати пошто оно практично води до истих закључака, а формално одговара међусобној замени места коефицијената A и B у једначини (2.11).

Непознате коефицијенте A и B одређујемо на основу граничних услова (2.9) и (2.10). На десном (отвореном) крају вода, када је $z=0$, на основу једначина (2.13) и (2.10) добијамо

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=0} = \left(-\sqrt{R'G'}Ae^{-\sqrt{R'G'}z} + \sqrt{R'G'}Be^{\sqrt{R'G'}z} \right) \Big|_{z=0} = \sqrt{R'G'}(B-A) = 0, \quad (2.14)$$

одакле закључујемо да су константе A и B једнаке³, а да се напон U може написати као

$$U = A \left(e^{-\sqrt{R'G'}z} + e^{\sqrt{R'G'}z} \right). \quad (2.15)$$

Непознату константу A одређујемо на основу преосталог граничног услова (2.9), који полазећи од једначине (2.15) постаје

$$U|_{z=-L} = A \left(e^{-\sqrt{R'G'}z} + e^{\sqrt{R'G'}z} \right) \Big|_{z=-L} = A \left(e^{\sqrt{R'G'}L} + e^{-\sqrt{R'G'}L} \right) = E_0, \quad (2.16)$$

одакле добијамо непознату константу $A = \frac{E_0}{e^{\sqrt{R'G'}L} + e^{-\sqrt{R'G'}L}}$. Уврштавањем ове константе у израз (2.15) добијамо аналитичко решење за напон U

$$U = \frac{e^{-\sqrt{R'G'}z} + e^{\sqrt{R'G'}z}}{e^{\sqrt{R'G'}L} + e^{-\sqrt{R'G'}L}} E_0. \quad (2.17)$$

Ово решење за напон разматраћемо детаљније у наставку, а користићемо га и за поређење са резултатима добијеним методом коначних елемената.

3 Решење методом коначних елемената

Када се овај проблем решава методом коначних елемената, један од приступа је да се диференцијалне једначине које описују овај проблем не решавају директно, већ да се, уместо тога, крене од чињенице да расподела напона на воду мора бити таква тако да се минимизира снага губитака⁴. Када се ова идеја искомбинује са апроксимацијом део по део, принцип минималне енергије директно води ка решењу помоћу метода коначних елемената, као што ће бити приказано у наставку. Ово је само један од начина да се формулише метод коначних елемената, а у оквиру овог курса биће представљени и други начини.

3.1. Расподела снаге и њена минимизација

Иако је у општем случају релативно тешко математички егзактно одредити расподелу снаге у произвољном систему, принцип минималне енергије није тешко формулисати помоћу апроксимације функционала. Кораци у овом процесу су:

1. Изразити снагу губитака вода $P_1(z)$ у функцији напона дуж вода $U(z)$ као:

$$P_1 = P_1(U(z)). \quad (3.1)$$

Конкретан израз за P_1 у овом тренутку није од непосредног интереса, а биће изведен касније.

2. Поделити домен од интереса (комплетан вод) на K коначних сегмената, то јест K коначних елемената.

3. Апроксимирати напон дуж вода $U(z)$ користећи подесну апроксимацију за сваки од коначних елемената у облику

$$U(z) = \sum_{i=1}^M a_i f_i(z), \quad (3.2)$$

при чему су $f_i(z)$ подесно изабране унапред познате функције, такозване функције базиса, а a_i су непознате константе које је потребно одредити методом коначних елемената. Када ове константе буду

³ Случај $R'=0$ или $G'=0$ не долази у обзир, пошто у том случају вод не би био са губицима у проводницима и у диелектрику, што је полазна претпоставка.

⁴ Ово директно произилази из принципа минималне енергије који, са друге стране, потиче из термодинамике.

познате, помоћу израза (3.2) за сваки од елемената могуће је одредити напон у било којој тачки, а самим тиме и напон дуж комплетног вода.

4. Полазећи од израза (3.2), за сваки од коначних елемената изразити снагу губитака P_J у функцији функција базиса f_i и одговарајућих M непознатих коефицијената a_i . Пошто су функције базиса f_i унапред познате, снага губитака може се изразити као функција искључиво непознатих коефицијената a_i у облику

$$P_J = P_J(a_1, a_2, \dots, a_M). \quad (3.3)$$

5. Увести ограничење које мора да важи за KM непознатих коефицијената тако да се обезбеди да напон дуж вода буде континуална функција. На овај начин повезани (односно ограничени) скуп (ансамбл) коначних елемената поседоваће N степени слободe, при чему важи $N \leq KM$.

6. Минимизирати снагу губитака појединачном варијацијом непознатих коефицијената a_i , уз задржавање ограничења да напон дуж вода мора бити континуална функција:

$$\frac{\partial P_J}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

На основу ове минимизације одређују се непознати коефицијенти, а самим тим одређује се апроксимација за напон дуж вода. **Овде додај причу из математике за одређивање минимума функције више променљиве из математике.**

Метод описан до сада поприлично је апстрактан и отвара врата за велику разноврсност метода као и за велики број питања. На колико коначних елемената треба поделити оригинални домен и да ли сви елементи требају бити истих димензија? Каквог облика требају да буду функције базиса? На који начин треба увести ограничења која апроксимативно решење мора да задовољава? На који начин треба спровести минимизацију? Ова и друга питања немају јединствене одговоре, а различити одговори дефинишу различите класе метода коначних елемената. У оквиру овог примера биће приказана само једна од комбинација могућих избора.

Један од кључних корака у методу коначних елемената, за начин који ће бити описан у овом примеру, а који не уноси двосмислености је то да се минимизира снага, односно снага губитака у нашем примеру, па је полазна тачка одређивање израза за снагу, односно за снагу губитака. Самим тим примерено је почети од одговарајућег израза за снагу, односно од израза за снагу губитака у нашем примеру.

3.2. Експлицитни изрази за снагу

Како бисмо одредили изразе за снагу која се преноси водом у функцији напона, а касније и изразе за снагу губитака вода, посматрајмо кратку секцију вода дужине dz , еквивалентно представљену на слици 1.1(б). Снага која се предаје сегменту воду са леве стране једнака је

$$P_{in} = UI, \quad (3.5)$$

а снага коју сегмент вода предаје остатку на свом десном крају једнака је

$$P_{out} = (U + dU)(I + dI) = UI + UdI + IdU + dUdI \approx UI + UdI + IdU, \quad (3.6)$$

при чему је у претходном изразу искоришћено да се двоструко инфинитезимални сабирак $dUdI$ може занемарити у односу на остале сабирке.

Разлика између снаге која се предаје воду на његовом левом крају, и снаге коју вод предаје остатку на свом десном крају мора бити једнака снази губитака на сегменту дужине dz

$$dP_J = P_{in} - P_{out} = -UdI - IdU. \quad (3.7)$$

Пошто су за ранију претпоставку $U, I > 0$, на основу израза (2.3) и (2.4), прираштаји напона и струје негативни, на основу израза (3.7) закључујемо да је снага губитака на сваком сегменту дужине dz позитивна, а на основу тога и укупна снага губитака вода позитивна, као што је и очекивано.

Први сабиран након последњег знака једнакости у изразу (3.7) може се посматрати као снага губитака у диелектрику, а други као снага губитака у проводницима вода. На основу израза (2.3), (2.4) и (3.7) снага губитака на сегменту вода дужине dz може се написати искључиво у функцији напона као

$$dP_J = \left[G'U^2 + \frac{1}{R'} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (3.8)$$

Сабирањем, односно интеграцијом, чланова dP_j из израза (3.8) добијамо укупну снагу губитака вода

$$P_j = \int_{z=-L}^0 dP_j = \int_{z=-L}^0 \left[G'U^2 + \frac{1}{R'} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (3.9)$$

Снага губитака у воду из израза (3.9) одређена је искључиво полазећи од физичких закона и једнозначно је одређена. Техника за проналажење њеног апроксимативног решења, односно само апроксимативно решење, са друге стране, није једнозначно, као што ће бити приказано у наставку.

3.3. Апроксимација део по део

Како би се апроксимирао напон дуж вода $U(z)$, једноставан и елегантан начин је да се искористи део-по-део линеарна апроксимација (*piecewise-straight approximation*). Комплетан вод, у опсегу $-L \leq z \leq 0$, издели се на K сегмената, односно коначних елемената, а за напон се претпостави да се мења линеарно између вредности на крајевима посматраног сегмента. На месту спојева коначних елемената, напон мора бити континуалан, а због претпостављене линеарне промене напона дуж сваког коначног елемента, напон неће⁵ имати континуалан (први) извод у тим тачкама. Због тога што је $U(z)$ континуална функција, могуће⁶ је спровести интеграцију у (3.9).

Како би се процедура решавања овог проблема организовала на начин једноставан за софтверску имплементацију, нумерисимо K елемената редом, почевши од левог краја вода који ће бити нумерисан са (1). Леви и десни крај сваког коначног елемента биће означени суфиксима „l“ и „r“, као што је илустровано на слици 1.2(a) за пример са пет коначних елемената.

Напон и струја на крајевима елемента k означаваћемо на два начина, у зависности од контекста. Први начин је да се сваком чвору додели јединствен број, као што је назначено на слици 1.2(a), а онда се струја и напон у одређеном чвору једноставно означе као U_3 или I_9 . Други начин, погодан када се независно посматра један елемент, је да се чвор означава комбинацијом броја елемента коме пропада и додатном ознаком „l“ или „r“ за леви и десни крај тог елемента, респективно. Према овој нотацији, напони и струје означавају се као $U_{k,l}$ и $U_{k,r}$, а одговарајуће позиције крајева посматраног елемента као $z_{k,l}$ и $z_{k,r}$. Претпоставка да се напон дуж једног коначног елемента мења линеарно може се описати следећом једначином (праве):

$$U(z) - U_{k,l} = \frac{U_{k,r} - U_{k,l}}{z_{k,r} - z_{k,l}} (z - z_{k,l}), \quad (3.10)$$

односно, након сређивања, као

$$U(z) = \frac{z_{k,r} - z}{z_{k,r} - z_{k,l}} U_{k,l} + \frac{z - z_{k,l}}{z_{k,r} - z_{k,l}} U_{k,r}. \quad (3.11)$$

Ради једноставности у наставку ћемо изоставити ознаке елемента (k у претходним изразима), а пошто ћемо разматрати само један елемент, ово не може резултовати недвосмисленошћу. Једначина (3.11) може се компактно записати као

$$U(z) = \alpha_l(z) U_l + \alpha_r(z) U_r \quad (3.12)$$

при чему су функције позиције

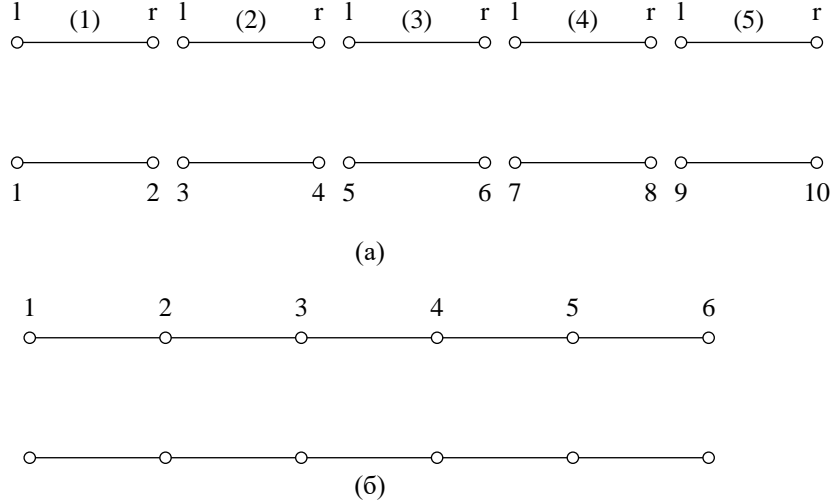
$$\alpha_l(z) = \frac{z_r - z}{z_r - z_l} \quad \text{и} \quad (3.13)$$

⁵ Изузетак је случај када два суседна коначна елемента имају линеарну промену напона истог нагиба, међутим у том посебном случају та два коначна елемента могу се посматрати као један коначни елемент.

⁶ Пошто је $U(z)$ континуална функција линеарна са обе стране споја суседних коначних елемената, функција $\frac{dU}{dz}$ која се појављује у другом члану интеграла (3.9) може поседовати само прекид прве врсте (*jump discontinuity*, *step discontinuity*, односно *discontinuity of the first kind*), а интеграл (3.9) је коначан и може се израчунати.

$$\alpha_r(z) = \frac{z - z_l}{z_r - z_l} \quad (3.14)$$

уведене у сврху компактнијег записа. За сваки коначни елемент могу се формирати функције попут ових.



Слика 1.2. Вод се посматра као каскада пет сегмената. (а) Нумерација елемената и чворова када се елементи посматрају одвојено. (б) Нумерација чворова након повезивања.

Укупна снага губитака у воду рачуна се као сума снага губитака у сваком коначном елементу, односно као

$$P_J = \sum_{k=1}^K P_{J,k}, \quad (3.15)$$

при чему је $P_{J,k}$ снага Цулових губитака у коначном елементу k , који се, полазећи од израза (3.9) рачуна као

$$P_{J,k} = \int_{z=z_{k,l}}^{z_{k,r}} \left[G' U^2 + \frac{1}{R'} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (3.16)$$

Након замене апроксимације за напон (3.12) у претходни израз, добијамо да се апроксимација за снагу губитака у једном елементу рачуна као

$$P_{J,k} = \frac{1}{R'} \int_{z=z_1}^{z_r} \left(U_l \frac{d\alpha_l}{dz} + U_r \frac{d\alpha_r}{dz} \right)^2 dz + G' \int_{z=z_1}^{z_r} (U_l \alpha_l + U_r \alpha_r)^2 dz. \quad (3.17)$$

На овом месту и надаље сматраћемо да су подужна отпорност и проводност, R' и G' , константне у оквиру једног коначног елемента, иако то сам метод коначних елемената не захтева. Ово поједностављује имплементацију метода коначних елемената за овај пример и дозвољава да се R' и G' извуку испред интеграла (3.17).

Полазећи од израза (3.17), снага губитака за један коначни елемент може се компактно записати у матричној квадратној форми као

$$P_{J,k} = [U_l \quad U_r] \left[\frac{1}{R'} [S] + G' [M] \right] \begin{bmatrix} U_l \\ U_r \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

при чему су $[S]$ и $[M]$ матрице димензије 2×2 чији се елементи рачунају као

$$S_{ij} = \int_{z=z_1}^{z_r} \frac{d\alpha_i}{dz} \frac{d\alpha_j}{dz} dz \quad (3.19)$$

$$M_{ij} = \int_{z=z_1}^{z_r} \alpha_i \alpha_j dz, \quad (3.20)$$

при чему индекси i и j могу узимати било коју од вредности „l“ или „r“, за леву, односно десну страну елемента. Ако желимо још компактнији запис, уведемо матрицу метода коначних елемената као

$$[F] = \frac{1}{R'} [S] + G' [M]. \quad (3.21)$$

Након овога снага губитака за један коначни елемент може се записати као једноставна квадратна форма по напонима придруженим коначном елементу (на његовим границама)

$$P_{J,k} = [U]_k^T [F] [U]_k \quad (3.22)$$

при чему је $[U]_k^T = [U_l \quad U_r]$ вектор димензије 1×2 напона на левом и десном крају коначног елемента k . Једначина (3.22) не само да је елегантан и компактан запис посматраног проблема, већ и сугерише начин имплементације метода, наглашавајући да су потребни прорачуни слични за сваки коначни елемент. Према томе потребно је дефинисати и имплементирати алгоритам за прорачун једног коначног елемента, а онда то искористити и за остале коначне елементе.

3.4. Матрице метода коначних елемената

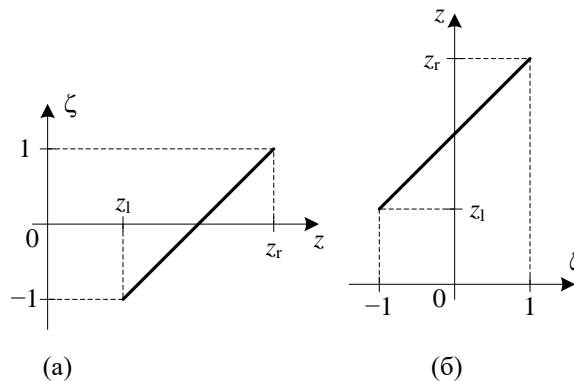
Прорачуне у методу коначних елемената најбоље је спровести прорачуном матрица за један коначан елемент детаљно, а онда коришћењем тог неизмењеног алгоритма за сваки следећи коначан елемент. Овакав приступ сугерише да би процедуре требало спровести, колико год је то могуће, у функцији нормализованих променљивих независних од димензија и положаја конкретног коначног елемента. Како бисмо то спровели, уведемо локалну координату ζ за један типичан елемент. Означимо дужину коначног елемента k са

$$L_k = z_{k,r} - z_{k,l}, \quad (3.23)$$

при чему је веза између локалне координате ζ родитељског елемента и z координате конкретног (посматраног) коначног елемента облика

$$\zeta = \frac{2}{L_k} (z - z_{k,l}) - 1. \quad (3.24)$$

На основу трансформације (3.24) очигледно је да се глобална координата једног конкретног коначног елемента $z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}$ пресликава у локалну координату ζ која је у границама $-1 \leq \zeta \leq 1$. Трансформација координата из глобалног у локални координатни систем графички је приказана на слици 1.3(a), а инверзна трансформација (из локалног у глобални координатни систем) приказана је на слици 1.3(b). Према томе, када се прорачун матрица спроведе у локалном координатни систем, помоћу трансформације инверзне оној из (3.24) могу се добити резултати у глобалном координатном систему за конкретне коначне елементе.



Слика 1.3. Трансформације између локалног и глобалног координатног система. (a) Из глобалног у локални координатни систем. (b) Из локалног у глобални координатни систем.

На основу претходне трансформације, функције позиције α_1 и α_r могу се представити као

$$\alpha_1(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2} \quad \text{и} \quad (3.25)$$

$$\alpha_r(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}, \quad (3.26)$$

тако да се апроксимација за напон из (3.12) може написати као

$$U(\zeta) = U_1\alpha_1(\zeta) + U_r\alpha_r(\zeta). \quad (3.27)$$

Интеграција и диференцирање неопходни како би се одредила снага губитака у једном коначном елементу, као и остали неопходни прорачуни, лако се могу спровести у локалном координатном систему. На пример, први извод напона по глобалној координати z лако је спровести у локалном координатном систему као

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dU}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left(U_1 \frac{d\alpha_1}{d\zeta} + U_r \frac{d\alpha_r}{d\zeta} \right) \frac{2}{L_k} = \frac{U_r - U_1}{L_k}. \quad (3.28)$$

Овај извод константан је за један коначан елемент, што је директна последица избора апроксимације напона као део-по-део линеаран. Интеграција неопходна за прорачун снаге губитака, попут оне у квадратној форми (3.18), такође се може спровести у облику у коме не фигурише дужина коначног елемента. У једначини (3.18) матрице $[S]$ и $[M]$ односе се на коначни елемент дужине L_k . Уведимо нормализоване матрице $[\tilde{S}]$ и $[\tilde{M}]$ које задовољавају

$$[\tilde{S}] = \frac{L_k}{2} [S] \quad \text{и} \quad (3.29)$$

$$[\tilde{M}] = \frac{2}{L_k} [M]. \quad (3.30)$$

Нормализације (3.29) и (3.30) уведене су тако да након интеграције у родитељском домену $-1 \leq \zeta \leq 1$, у изразима за елементе нормализованих матрица $[\tilde{S}]$ и $[\tilde{M}]$ нигде не фигурише дужина коначног елемента, а елементи ових нормализованих матрица прорачунавају се као:

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} \int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_1}{d\zeta} \frac{d\alpha_1}{d\zeta} d\zeta & \int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_1}{d\zeta} \frac{d\alpha_r}{d\zeta} d\zeta \\ \int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_r}{d\zeta} \frac{d\alpha_1}{d\zeta} d\zeta & \int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_r}{d\zeta} \frac{d\alpha_r}{d\zeta} d\zeta \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad (3.31)$$

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} \int_{\zeta=-1}^1 \alpha_1 \alpha_1 d\zeta & \int_{\zeta=-1}^1 \alpha_1 \alpha_r d\zeta \\ \int_{\zeta=-1}^1 \alpha_r \alpha_1 d\zeta & \int_{\zeta=-1}^1 \alpha_r \alpha_r d\zeta \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Иако изрази (3.31) и (3.32) изгледају релативно сложено, ти изрази се релативно једноставно прорачунавају, обзиром да су подинтегралне функције једноставни полиноми:

$$\int_{\zeta=-1}^1 \alpha_1 \alpha_1 d\zeta = \int_{\zeta=-1}^1 \alpha_r \alpha_r d\zeta = \frac{2}{3}, \quad (3.33)$$

$$\int_{\zeta=-1}^1 \alpha_1 \alpha_r d\zeta = \frac{1}{3}, \quad (3.34)$$

$$\int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_1}{d\zeta} \frac{d\alpha_1}{d\zeta} d\zeta = \int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_r}{d\zeta} \frac{d\alpha_r}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad (3.35)$$

$$\int_{\zeta=-1}^1 \frac{d\alpha_l}{d\zeta} \frac{d\alpha_r}{d\zeta} d\zeta = -\frac{1}{2}. \quad (3.36)$$

Сви елементи матрица (3.31) и (3.32) су константи бројеви, а матрице $[\tilde{S}]$ и $[\tilde{M}]$ своде се на

$$[\tilde{S}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и} \quad (3.37)$$

$$[\tilde{M}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

На основу свега овога, полазећи од израза (3.18), израз за снагу губитака у једном коначном елементу своди се на

$$P_{j,k} = [U_l \quad U_r] \left[\frac{1}{R'} \frac{1}{L_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + G' \frac{L_k}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} U_l \\ U_r \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Сада када смо одредили апроксимативни израз са снагу губитака у једном коначном елементу, остаје да се одреди укупна снага губитака у воду сабирањем снаге губитака за сваки коначни елемент, као у (3.15), а онда спровести минимизацију те снаге по напонима чворова елемената, U_i . Ово ће бити спроведено у наредном делу.

4. Глобална минимизација

Локалне једначине које описују појединачне коначне елементе су есенцијалне, али саме нису довољне да се реши проблем. За решавање проблема неопходно је знати и како су елементи повезани, а те везе описане су у наставку. У овом погледу метод коначних елемената подсећа на теорију електричних кола. Да би се електрично коло решило потребна су два скупа једначина. Први скуп једначина описује конкретне елементе електричног кола (на пример, отпорник, калем и кондензатор), обично као везу између напона и струје посматраног елемента електричног кола. Други скуп једначина описује топологију кола (везе између конкретних елемената електричног кола), а обично се те једначине пишу по првом и другом Кирхофовом закону.

4.1. Повезивање елемената

Скуп свих коначних елемената који чине вод са губицима могу се посматрати као каскада мрежа са два приступа, при чему су напони на приступима мреже k $U_{k,l}$ и $U_{k,r}$. Ако се коначни елементи посматрају као независне мреже са два приступа, приступи тих мрежа морају се међусобно повезати. Другим речима, дозвољено је доделити различите ознаке напона на десном крају једног коначног елемента и левом крају следећег коначног елемента, али напон на том споју мора бити јединствен, пошто су елементи повезани. Да би се једноставније описало како су елементи повезани, на начин који олакшава прорачун, чворовима коначних елемената (крајњим тачкама елемената) биће дати глобални индекси, као што је назначено на слици 1.2(б). Овакво означавање назваћемо повезано индексирање (*connected numbering*), како бисмо га разликовали од неповезаног индексирања (*disconnected numbering*) приказаног на слици 1.2(а). Када је потребно разликовати да ли се користи повезано или неповезано индексирање, користиће се „con“ или „dis“ експоненти. На пример, напон на десном крају трећег коначног елемента, означен је индексом 6 код неповезаног индексирања, односно индексом 4 код повезаног индексирања, односно важи

$$U_{3,r} = U_6^{\text{dis}} = U_4^{\text{con}}. \quad (4.1)$$

Кроз ова два начина индексирања приказана су два гледишта. Прво, илустровано сликом 1.2(а), посматра коначне елементе као независне целине. Пет коначних елемената описано је помоћу 10 напона, два напона по елементу, а ти напони повезани су везама између коначних елемената. Друго гледиште, графички представљено сликом 1.2(б), придружује напоне коначних елемената глобалним чворовима, а модел вода са пет коначних елемената (који поседује шест независних чворова) формирају систем од шест недељивих веза које су описане помоћу шест напона чворова од U_1^{con} до U_6^{con} . За пример са пет коначних елемената са слике 1.2, напони код неповезаног индексирања повезани су са напонима код повезаног индексирања помоћу матричне једначине⁷

⁷ На празним местима матрице подразумевају се вредности нула.

$$\begin{bmatrix} U_1^{\text{dis}} \\ U_2^{\text{dis}} \\ U_3^{\text{dis}} \\ U_4^{\text{dis}} \\ U_5^{\text{dis}} \\ U_6^{\text{dis}} \\ U_7^{\text{dis}} \\ U_8^{\text{dis}} \\ U_9^{\text{dis}} \\ U_{10}^{\text{dis}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{\text{con}} \\ U_2^{\text{con}} \\ U_3^{\text{con}} \\ U_4^{\text{con}} \\ U_5^{\text{con}} \\ U_6^{\text{con}} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Претходна матрична једначина суштински показује да се шест напона чворова придружених пет повезаним коначним елементима може посматрати као десет крајњих напона елемената, при чему се једно индексирање чворова пресликава на друго индексирање чворова помоћу приказане матрице. Ова веза између повезаних и неповезаних начина индексирања, које се матрично може представити као

$$[U^{\text{dis}}] = [C][U^{\text{con}}] \quad (4.3)$$

обично се назива трансформација повезаности (*connection transformation*). Та трансформација показује која ограничења морају да задовоље напони неповезаних елемената $[U^{\text{dis}}]$ како би се добили напони коначних елемената $[U^{\text{con}}]$ у повезаном систему. Матрица $[C]$ обично се назива матрица повезаности (*connection matrix*).

Укупна снага губитака за вод може се даље написати било помоћу крајњих напона елемената, било преко напона чворова у неповезаном систему. Укупна снага губитака у воду може се написати било као сума снаге губитака појединачних елемената, као што је наведено у (3.15), или еквивалентно као квадратна форма облика

$$P_J = [U^{\text{dis}}]^T \begin{bmatrix} \frac{2}{R'_1 L_1} [\tilde{S}] + \frac{G'_1 L_1}{2} [\tilde{M}] \\ \frac{2}{R'_2 L_2} [\tilde{S}] + \frac{G'_2 L_2}{2} [\tilde{M}] \\ \vdots \\ \frac{2}{R'_5 L_5} [\tilde{S}] + \frac{G'_5 L_5}{2} [\tilde{M}] \end{bmatrix} [U^{\text{dis}}], \quad (4.4)$$

слично као у (3.18). Матрица коефицијената ове квадратне форме је блок-дијагонална (*block diagonal*). Састоји се од нула изузев подматрица димензије 2×2 које се налазе на главној дијагонали комплетне матрице. Свака ова подматрица (дијагонала 2×2) одговара једном коначном елементу. Ако са $[F^{\text{dis}}]$ означимо матрицу ових коефицијената (димензије 10×10 за пример са пет коначних елемената), онда се укупна снага губитака у овом примеру може написати као

$$P_J = [U^{\text{dis}}]^T [F^{\text{dis}}][U^{\text{dis}}]. \quad (4.5)$$

Напони чворова у неповезаном систему, полазећи од релације (4.3), могу се изразити помоћу напона чворова у повезаном систему, па израз за снагу губитака вода постаје

$$P_J = [U^{\text{con}}]^T [C]^T [F^{\text{dis}}][C][U^{\text{con}}], \quad (4.6)$$

при чему се са

$$[F^{\text{con}}] = [C]^T [F^{\text{dis}}][C] \quad (4.7)$$

може означити финална матрица коефицијената за повезани систем индексирања.

Ако се узме да су сви коначни елементи исте дужине L_e , и да је вод униформан тако да се подужна отпорност R' и проводност G' не мењају дуж вода, онда су финалне матрице (за повезано индексирање) за пример са пет коначних елемената

$$\frac{1}{R'}[C]^T[S][C] = \frac{2}{L_e} \frac{1}{R'}[C]^T[\tilde{S}][C] = \frac{1}{R'L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad (4.8)$$

$$G'[C]^T[M][C] = \frac{L_e}{2} G'[C]^T[\tilde{M}][C] = \frac{G'L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Укупна снага губитака је финално

$$P_J = [U^{\text{con}}]^T \left(\frac{1}{R'}[C]^T[S][C] + G'[C]^T[M][C] \right) [U^{\text{con}}], \quad \text{односно} \quad (4.10)$$

$$P_J = [U^{\text{con}}]^T [F^{\text{con}}][U^{\text{con}}]. \quad (4.11)$$

Остаје нам још да одредимо чворне напоне (за повезано индексирање) који ће минимизирати снагу губитака.

4.2. Минимизација укупне снаге губитака

Финални корак у проналажењу решења за расподелу напона дуж вода са губицима је минимизација снаге губитака варијацијом чворних напона. У ствари, сви кораци до сада једино су служили за одређивање укупне снаге губитака у функцији коначног броја чворних напона, омогућавајући примену закона да напон мора имати такву расподелу да се минимизира снага губитака. Минимизација сама по себи математички није захтевна.

Сваки чворни напон дуж вода може се слободно мењати, изузев напона на страни вода код генератора. Напон у том чвору одређен је напоном генератора и није независна променљива. Према томе, минимизација снаге губитака може се спровести варијацијом свих чворних напона изузев тог напона. Ако је систем описан са N чворних напона, диференцирање се може спровести по $N-1$ независних чворних напона. Ако узмемо да је чворни напон U_1^{con} одређен генератором, укупна снага губитака биће минимална ако важи

$$\frac{\partial P_J}{\partial U_k^{\text{con}}} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (4.12)$$

Након примене (4.12) на једначину (4.11), минимизација снаге губитака резултује матричном једначином са N колона, једном за сваки чворни напон, али само са $N-1$ врстом (по једном за сваки од чворних напона који се могу независно мењати). На примеру са пет коначних елемената ($N=6$), минимизација снаге резултује

$$\begin{bmatrix} F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & & \dots & F_{65} & F_{66} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{\text{con}} \\ U_2^{\text{con}} \\ U_3^{\text{con}} \\ U_4^{\text{con}} \\ U_5^{\text{con}} \\ U_6^{\text{con}} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

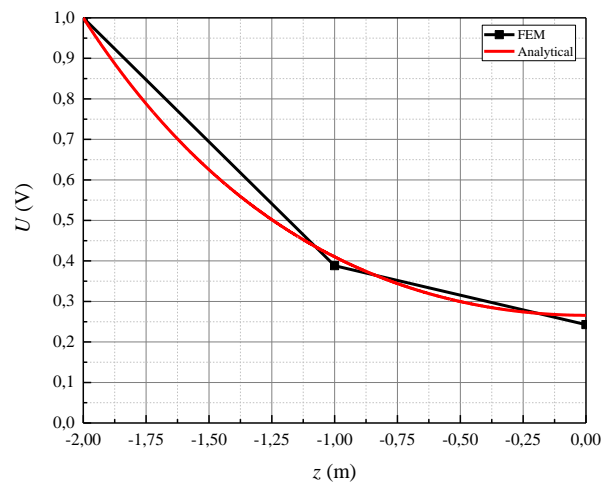
Претходна једначина може се написати и у стандардном облику. У запису (4.13) може се учинити да је свих шест напона непознато, што није тачно. Напон U_1^{con} на крају вода ка генератору је познат. Премештањем овог члана на десну страну једначине (4.13) долазимо до

$$\begin{bmatrix} F_{22} & F_{23} & \cdots & & F_{26} \\ F_{32} & F_{33} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & F_{55} & F_{56} \\ F_{62} & \cdots & F_{65} & F_{66} & \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} U_2^{\text{con}} \\ U_3^{\text{con}} \\ U_4^{\text{con}} \\ U_5^{\text{con}} \\ U_6^{\text{con}} \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} -F_{21}U_1^{\text{con}} \\ -F_{31}U_1^{\text{con}} \\ -F_{41}U_1^{\text{con}} \\ -F_{51}U_1^{\text{con}} \\ -F_{61}U_1^{\text{con}} \end{bmatrix}.
 \quad (4.14)$$

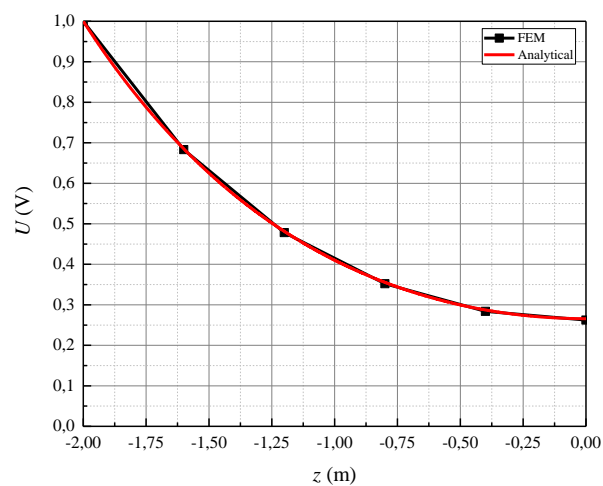
Матрична једначина (4.14) поседује онолико линеарних алгебарских једначине колико има независних чворних напона. Непознати чворни напони добијају се као решење тог система.

5. Решење

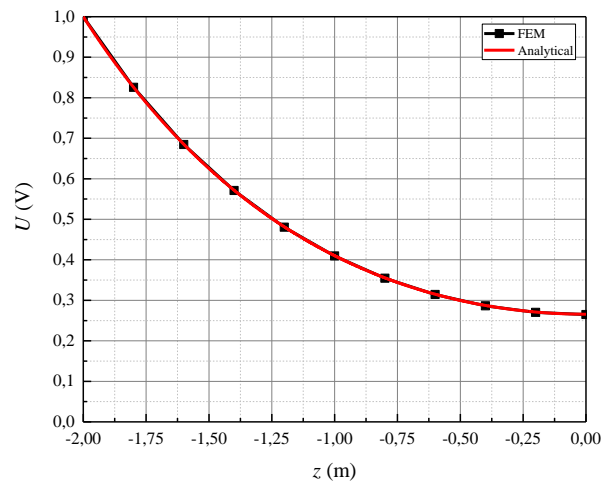
У наставку су приказана решења добијана аналитички и методом коначних елемената за вод дужине $L = 2 \text{ m}$, подужне отпорности $R' = 1 \Omega/\text{m}$ и подужне проводности $G' = 1 \text{ S}/\text{m}$, при чему је број коначних елемената K променљив.



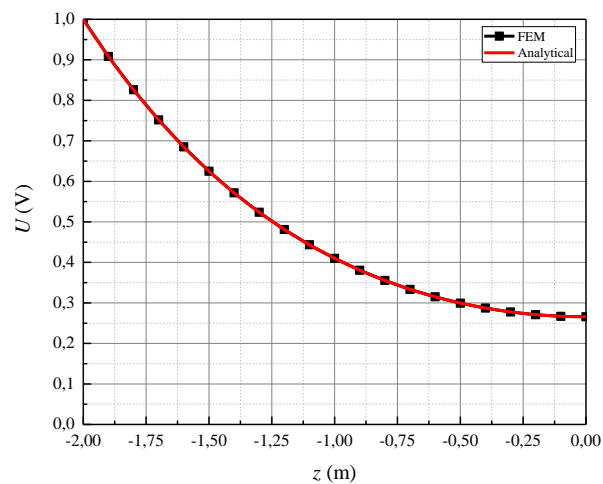
Слика 5.1. Аналитичко и нумеричко решење за $K = 2$.



Слика 5.2. Аналитичко и нумеричко решење за $K = 5$.



Слика 5.3. Аналитичко и нумеричко решење за $K = 10$.

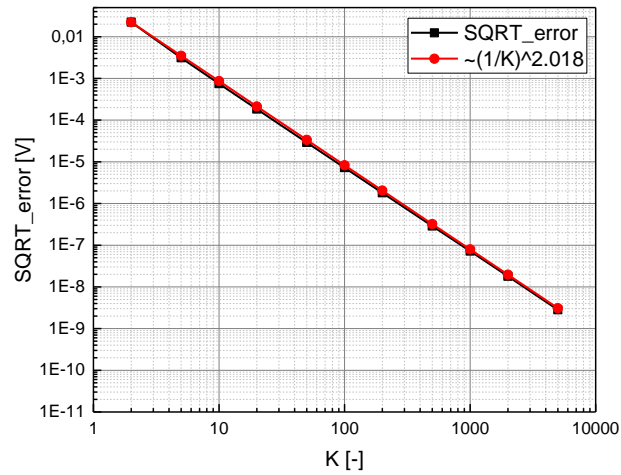


Слика 5.4. Аналитичко и нумеричко решење за $K = 20$.

Са приказаних графика видимо да се без обзира на број коначних елемената (K) нумеричко и аналитичко решење идеално поклапају на левом крају вода ($z = -2$ m), што је директно наметнуто граничним условом на том месту. За $K = 2$ видимо да се нумеричко решење значајно разликује од аналитичког, како у чворовима, тако и између њих. Са порастом броја коначних елемената нумеричко решење све се боље поклапа са аналитичким, а већ за $K = 20$ са графика практично није могуће уочити разлику.

Како бисмо испитали понашање решења, исти проблем ($L = 2$ m, $R' = 1 \Omega/\text{m}$ и $G' = 1 \text{ S/m}$) решен је за различит број коначних елемената ($2 \leq K \leq 5000$), а на слици 5.5 је приказан корен из средње квадратне грешке решења добијеног методом коначних елемената у односу на аналитичко решење. Грешка је рачуната само у чворовима коначних елемената. Резултати су приказани у логаритамској скали, а као процена тока грешке, на слици је приказана и функција пропорционална са

$$\frac{1}{K^{2,018}}$$



Слика 5.5. Корен из средње квадратне грешке нумеричког решења у функцији K .

Експериментални резултати са слике 5.5 показују да корен из средње квадратне грешке опада практично као квадрат броја коначних елемената. Постоји теоријско објашњење за квадратну зависност приказане грешке, у шта се не можемо упуштати на овом месту. Са даљим повећањем броја елемената, до изражаја би дошла грешка коначне тачности представљања реалних бројева на рачунару, тако да се након тога са повећањем броја коначних елемената не би повећавала тачност симулације.