

1 Њутн-Котесове интеграционе формуле

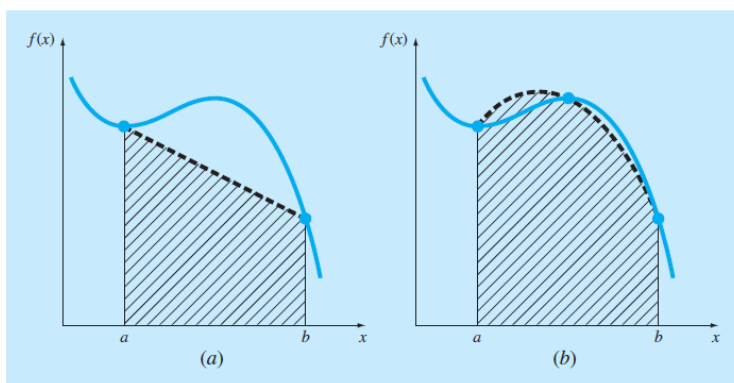
Њутн-Котесове формуле су једне од најчешће коришћених начина за нумеричку интеграцију. Заснивају се на стратегији замене сложених функција или табелираних података једноставнијим апроксимативним функцијама које се могу једноставно интегралити. Ово се математички може записати као

$$I = \int_{x=a}^b f(x)dx \approx \int_{x=a}^b f_n(x)dx \quad (1.1)$$

при чему је $f_n(x)$ апроксимативна функција. Ова функција обично се задаје у форми полинома n -тог реда као

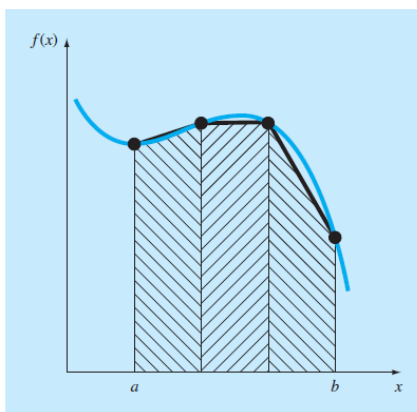
$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \quad (1.2)$$

Као пример, на слици 1.1(a), за апроксимативну функцију искоришћен је полином првог реда (права линија), а на слици 1.1(б) полином другог реда (парабола).



Слика 1.1.

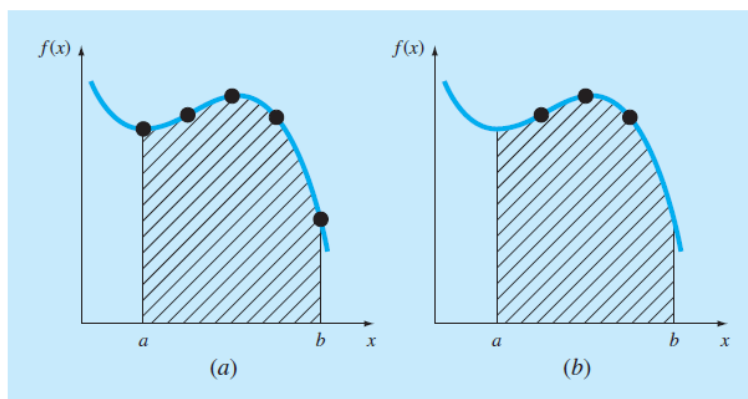
Интеграл се могу апроксимативно (нумерички) израчунати и тако што се апроксимативна функција користи на део по део интеграционог интервала. У већини случајева ови делови су једнаких дужина. Као пример, на слици 1.2 за интеграцију функције искоришћене су три линеарне апроксимативне функције. Како би се постигла виша тачност, могу се користити и апроксимативне функције вишег реда при чему се домен интеграције дели на више сегмената.



Слика 1.2.

Постоје два типа Њутн-Котесових формула. Њутн-Котесове формуле затвореног типа користе се када су вредности функције на границама домена интеграције познате (слика 1.3(a)). Њутн-Котесове формуле отвореног типа користе се када су границе интеграције шире од домена у коме је функција позната (слика 1.3(б)). Њутн-Котесове формуле отвореног типа у себи садрже и одређене елементе

екстраполације функције, а ове формуле ретко се користе за решавање одређених интеграла, па се надаље нећемо бавити њима.



Слика 1.3.

1.1. Трапезно правило

Трапезно правило је једна од најчешће коришћених Њутн-Котесових формула затвореног типа за нумеричку интеграцију. Трапезно правило одговара ситуацији када је апроксимативна функција у формули (1.1) полином првог реда, а тада се нумеричка интеграција може спровести као:

$$I = \int_{x=a}^b f(x)dx \approx \int_{x=a}^b f_1(x)dx, \quad (1.3)$$

при чему се линеарна функција $f_1(x)$ може написати као:

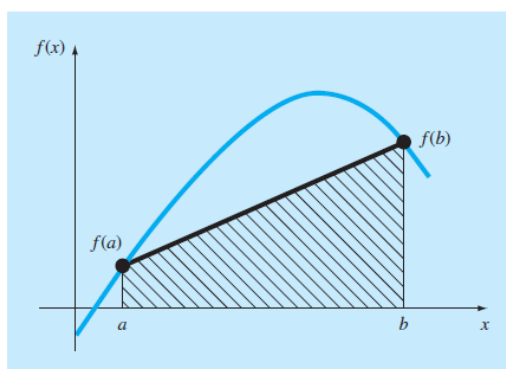
$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (1.4)$$

Заменом функције из (1.4) у (1.3) нумеричко решење оригиналног интеграла је

$$I \approx \int_{x=a}^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (1.5)$$

што представља трапезно правило нумеричке интеграције.

У случају једнодимензионих функција, одређеном интегралу одговара површина¹ између криве описане функцијом која се интегрирали и апсцисе (x -осе). Геометријски посматрано, трапезно правило одговара апроксимацији интеграла посматране функције површином трапеза чија је једна страница линеарна апроксимативна функција $f_1(x)$ која пролази кроз вредности функције на границама домена интеграције, као што је приказано на слици 1.4.



Слика 1.4.

Другачије посматрано, нумеричка (апроксимативна) вредност интеграла може се записати у облику

¹ Када је та површина изнад апсцисе, придружује јој се предзнак плус. У супротном, придружује јој се предзнак минус.

$$I \approx (b-a)\bar{f}_1, \quad (1.6)$$

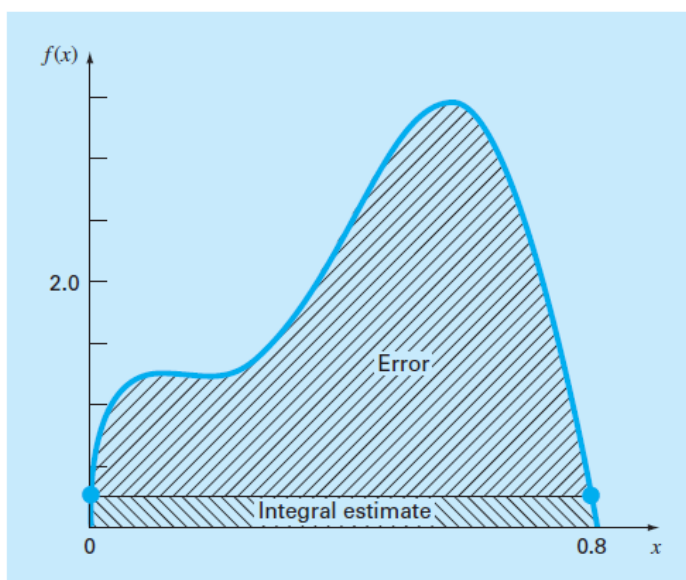
при чему је $\bar{f}_1 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ средња вредност апроксимативне функције $f_1(x)$ на интеграционом интервалу $a \leq x \leq b$. Згодно је приметити да се све Њутн-Котесове формуле могу написати у општем облику (1.6), при чему се средња вредност функције разликује у зависности од степена апроксимације.

1.1.1. Грешка трапезног правила

Када се интеграл посматране функције $f(x)$ рачуна трапезним правилом, очигледно је да ће, у општем случају, постојати одређена грешка. Пример када трапезно правило резултује великом грешком приказан је на слици 2.6, при чему је функција са слике облика $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, а интеграциони интервал је $0 \leq x \leq 0,8$. Овај интеграл може се решити аналитички, а тачно решење је 1,64053333 333334. Формула за процену грешке након једноструке примене трапезног правила је

$$e = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3, \quad (1.7)$$

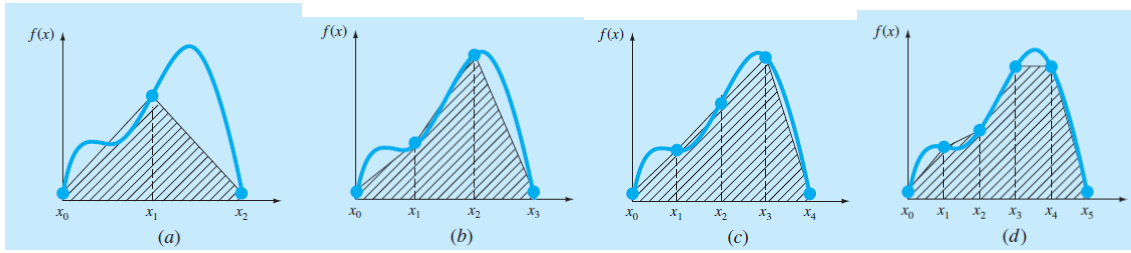
при чему је $a \leq \xi \leq b$. Једначина (1.7) указује на то да ако се трапезним правилом спроводи интеграција линеарне функције да ће грешка бити једнака нули. У супротном, за функције којима други или виши изводи не ишчезавају (функције које имају закривљеност), трапезно правило резултоваће грешком у општем случају.



Слика 1.6. $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ за $0 \leq x \leq 0,8$.

1.1.2. Вишеструка примена трапезног правила

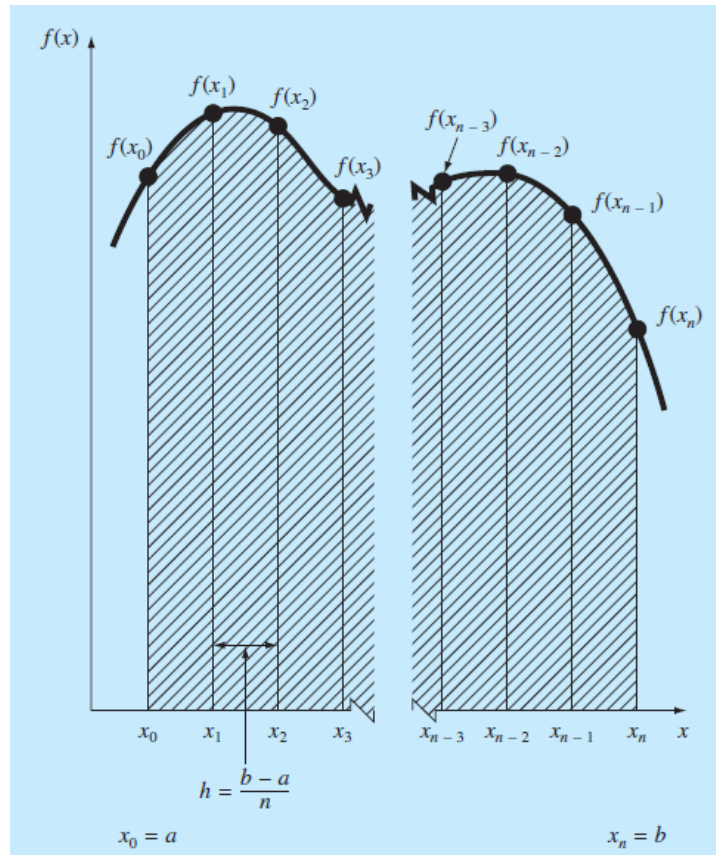
Један од начина да се побољша тачност трапезног правила је да се интеграциони интервал од a до b подели на већи број сегмената, а да се онда на сваком од тих сегмената примени трапезно правило, као што је илустровано на слици 1.7. Вредност интеграла који одговара сваком од ових сегмената сабира се, тако да се на крају добија вредност која одговара интегралу за целокупан интервал од a до b . Резултујућа једначина назива се композитна интеграциона формула.



Слика 1.7.

На слици 1.8 приказан је општи формат и номенклатура која ће се користити за карактеризацију композитне интеграционе формуле. Број једнако удаљених тачака нумеричке интеграције је $n+1$ ($x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$), односно број сегмената је n , а дужина сваког сегмента је

$$h = \frac{b-a}{n}. \quad (1.8)$$



Слика 1.8.

Ако се границе интеграла a и b обележе са x_0 и x_n , респективно, полазни интеграл може се написати у облику

$$I = \int_{x=a}^b f(x)dx = \int_{x=x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x=x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x=x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx. \quad (1.9)$$

Применом трапезног правила на сваки од интеграла након последњег знака једнакости у (1.9) добијамо нумеричко решење интеграла

$$I \approx h \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}, \quad (1.10)$$

односно након груписања чланова

$$I \approx \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + f(x_n) \right). \quad (1.11)$$

Претходна једначина може се представити у стандардном облику (1.6) као

$$I \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + f(x_n)}{2n}. \quad (1.12)$$

Разломак из израза (1.12) представља отежану средњу вредност функције $f(x)$, при чему су коефицијенти тежине унутрашњих тачака интеграције 2, док је коефицијент тежине крајњих тачака 1.

Грешка композитне интеграционе формуле може се добити сабирањем грешака за сваки од подсегмената на који је примењено трапезно правило, што, полазећи од формуле (1.7) даје

$$e = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i), \quad (1.13)$$

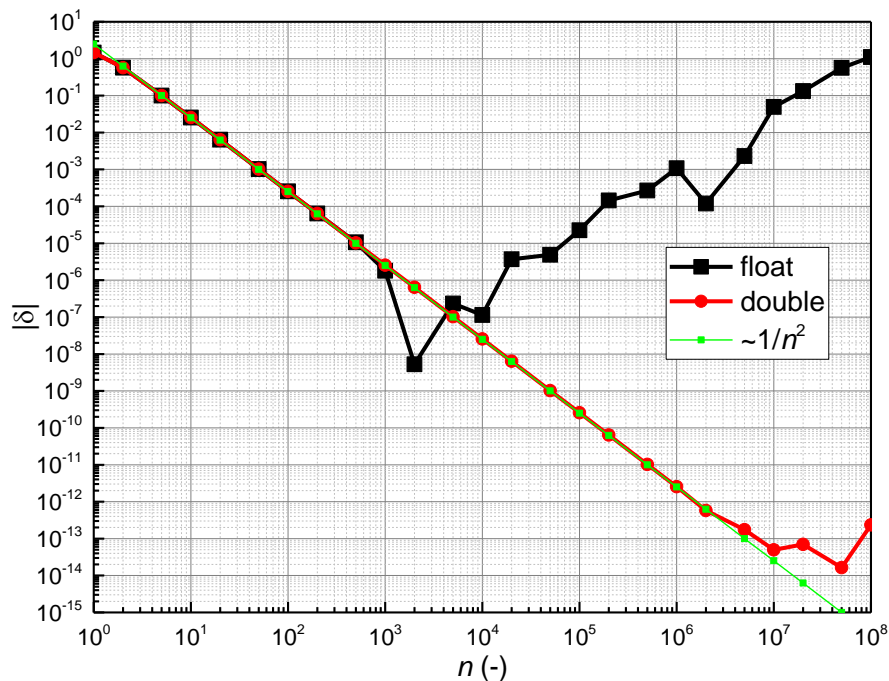
при чему је $f''(\xi_i)$ други извод функције $f(x)$ у тачки ξ_i која се налази негде на подсегменту i , односно за коју важи $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Претходни израз може се поједноставити уводећи средњу вредност ових других извода на следећи начин

$$\overline{f''} = \frac{\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)}{n}. \quad (1.14)$$

Након овога, израз (1.13) може се написати у облику

$$e = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \overline{f''}. \quad (1.15)$$

На слици 1.9 приказани су резултати примене композитног трапезног правила када се користи представљање бројева у једнострукој (float) и двострукој тачности (double). На графику је приказана апсолутна вредност грешке у зависности од броја сегмената интеграције (n). Нумерички се интеграл функција $f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ на интервалу $0 \leq x \leq 0,8$. За поређење приказана је и функција која опада пропорционално са квадратом броја сегмената, као што предвиђа формула (1.15).



Слика 1.9.

На основу претходног израза, може се очекивати да ће грешка интеграције композитним трапезним правилом опадати са квадратом броја сегмената n . Приметити да је у изразу (1.15) и $\overline{f''}$ функција броја сегмената n , па грешка нумеричке интеграције трапезним правилом не опада егзактно са

квадратом броја сегмената. Међутим, чест је случај да се $\overline{f''}$ не мења значајно у функцији броја сегмената n , па грешка нумеричке интеграције практично опада са квадратом броја сегмената n , слично као што је био случај и на слици 1.9. У наредним деловима биће приказане формуле за нумеричку интеграцију вишег реда које су тачније и имају бржу конвергенцију са порастом броја сегмената.

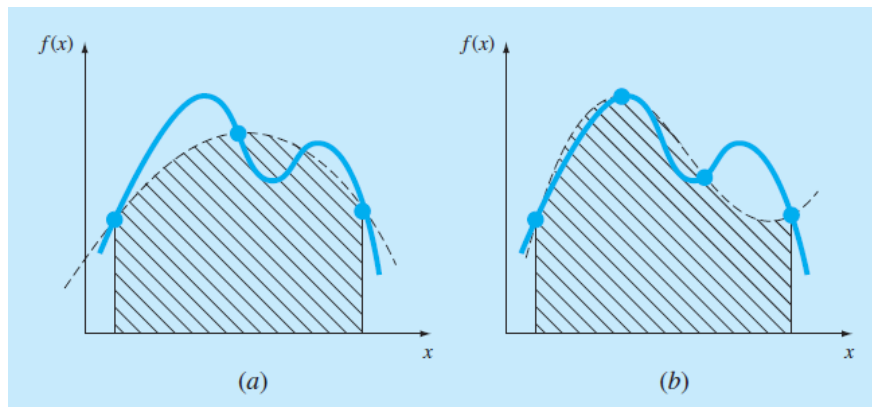
На основу свега изложеног до сад можемо да закључимо следеће:

- За једноструке интеграле функција које немају велику динамику, композитно трапезно правило даје задовољавајуће тачно решење за велики број инжењерских примена.
- Ако је потребна висока тачност, композитно трапезно правило захтева значајније рачунарске ресурсе. Иако захтевани рачунарски ресурси могу изгледати занемарљиво у случају примене на један интеграл, они могу постати значајни (а) када се прорачунава више интеграла, односно вишеструки интеграл или (б) када је прорачун подинтегралне функције захтеван. У тим случајевима, користе се ефикаснији приступи (као што ће бити приказано у наставку).
- Финално, грешка заокруживања може ограничити нашу способност да грешку нумеричке интеграције учинимо задовољавајуће ниском. Ово је последица како представљања бројева рачунарима (у коначној тачности), тако и великог броја рачунских операција које се спроводе у случају примене композитног трапезног правила са великим бројем сегмената.

Један од начина повећања ефикасности приказан је у наставку. Ефикасност је повећана применом полинома вишег реда за апроксимацију подинтегралне функције.

1.2. Симпсоново правило

Осим примене трапезног правила (које користи линеарну апроксимацију функције која се интегралом), један од начина да се добије тачнија процена интеграла је апроксимација подинтегралне функције полиномима вишег реда. На пример, ако се уведе додатна тачка између граница интеграла a и b , три тачке могуће је повезати параболом, као што је приказано на слици 1.10(а). Ако постоје две тачке равномерно распоређене између граница интеграла a и b , четири тачке могуће је повезати полиномом трећег реда, као што је приказано на слици 1.10(б). Формуле које настају интеграцијом оваквих апроксимација подинтегралне функције називају се Симпсонова правила.



Слика 1.10.

1.2.1. Симпсоново правило 1/3

Симпсоново правило 1/3 добија се када се за подинтегралну функцију f_n из (1.1) изабере интерполациони полином другог реда, односно када се узме

$$I = \int_{x=a}^b f(x)dx \approx \int_{x=a}^b f_2(x)dx. \quad (1.16)$$

Ако границе интеграције a и b означимо са x_0 и x_2 , респективно, а тачку између њих са x_1 и ако се $f_2(x)$ представи помоћу Лагранжовог интерполационог полинома другог реда, Симпсоново правило 1/3 постаје

$$I \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right) dx. \quad (1.17)$$

Након интеграције и сређивања претходног израза, Симпсоново правило 1/3 постаје

$$I \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \quad (1.18)$$

при чему је $h = (b-a)/2$ растојање између тачака интеграције. Претходна једначина позната је под називом Симпсоново правило 1/3. То је друга Њутн-Котесова формула затвореног типа. Ознака "1/3" потиче од тога што се h дели са 3 у једначини (1.18).

Симпсоново правило 1/3 може се написати и у облику (1.6)

$$I \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}, \quad (1.19)$$

при чему је $x_0 = a$, $x_2 = b$, а $x_1 = (b+a)/2$ је тачка на средини интеграционог интервала. Приметити на основу (1.18) да се крајње тачке у отежаној средњој вредности отежавају са једном шестином, док се централна тачка отежава са две трећине.

Када се примени на једном сегменту, Симпсоново правило 1/3 резултује грешком

$$e = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad (1.20)$$

односно, након замене $h = (b-a)/2$ добијамо

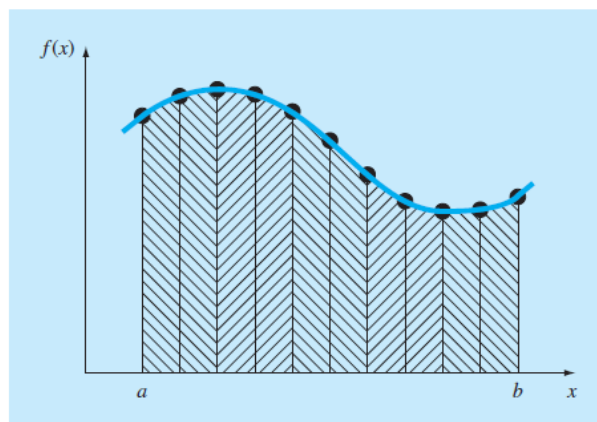
$$e = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad (1.21)$$

при чему је $a \leq \xi \leq b$. Према томе, поредећи претходни израз са изразом (1.7), закључујемо да Симпсоново правило 1/3 генерално има бржу конвергенцију од трапезног правила. На основу израза (1.21) закључује се да је Симпсоново правило 1/3 тачности трећег реда, иако је засновано на интерполацији кроз три тачке. Другим речима, Симпсоново правило 1/3 резултује тачним прорачуном интеграла кубова независне променљиве (x^3), иако је правило развијено полазећи од параболоидне апроксимације.

1.2.2. Вишеструка примена Симпсоновог правила 1/3

Као и код трапезног правила, тачност Симпсоновог правила може се побољшати поделом интеграционог интервала на n једнаких интеграционих сегмента, као што је приказано на слици 1.11, при чему је дужина једног интеграционог сегмента

$$h = \frac{b-a}{n}. \quad (1.22)$$



Слика 1.11.

Полазни интеграл може се написати у облику

$$I = \int_{x=x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x=x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x=x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x=x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx, \quad (1.23)$$

а након примене Симпсоновог правила 1/3 на сваки од интеграла након последње једнакости у (1.23), добијамо

$$I \approx 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \dots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}, \quad (1.24)$$

а након груписања чланова претходни израз може се написати као

$$I \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) \right) + 2 \left(\sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j) \right) + f(x_n)}{3n}. \quad (1.25)$$

Приметити, као што је и илустровано на слици 1.11, за имплементацију овог метода неопходан је паран број интеграционих сегмената.

Процена грешке за вишеструку примену Симпсоновог правила добија се на исти начин као и у случају трапезног правила, односно тако што се сумирају грешке за сваки до сегмената на коме се примењује Симпсоново правило 1/3. Полазећи од једначине (1.20), добијамо

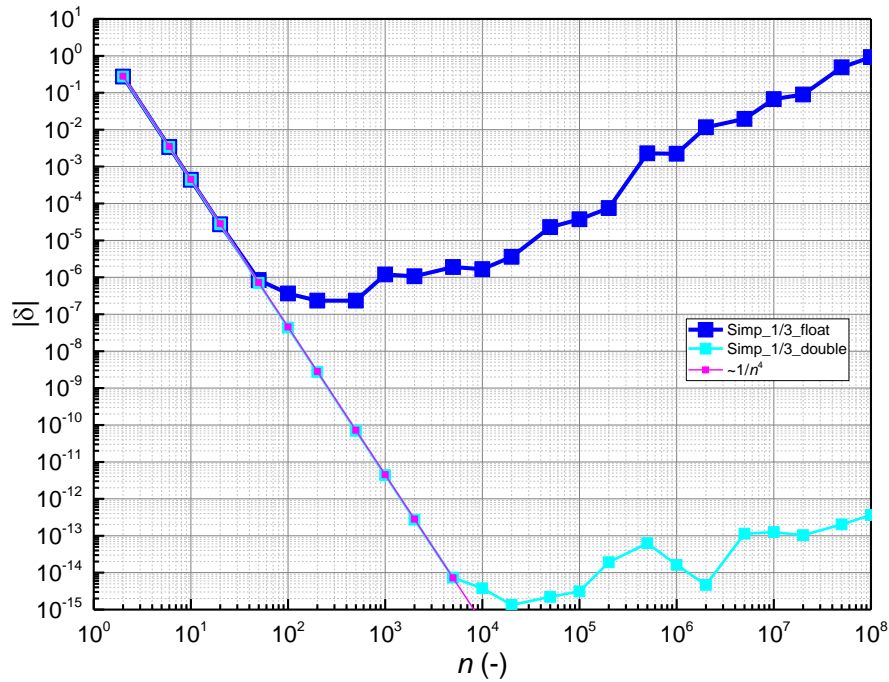
$$e = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)} \quad (1.26)$$

при чему је $\frac{1}{n/2} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_{2k-1})$ процена средње вредности подинтегралне функције, при чему важи

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}.$$

На основу формуле (1.26) можемо видети да вишеструка примена Симпсоновог правила даје бржу конвергенцију решења у односу на вишеструку примену трапезног правила. Због овога се Симпсоново правило сматра супериорним у односу на трапезно правило у већини апликација. Међутим, као што је већ напоменуто, ово правило ограничено је на примену над еквиливантним тачкама. Додатно, ограничено је на примену на паран број сегмената (који су дефинисани непарним бројем тачака). Како би се превазишао овај недостатак, у наставку ће бити приказано Симпсоново правило које је применљиво на број сегмената који је дељив са три. Та формула назива се Симпсоновим правилом 3/8, а заједно са Симпсоновим правилом 1/3 омогућава интеграцију функције која је описана било парним, било непарним бројем сегмената.

На слици 1.12 приказани су резултати за исти пример као и на слици 1.9, само што се сада користи Симпсоново правило 1/3. На слици је приказана и функција која опада пропорционално са четвртим степеном броја сегмената (n), која описује процену грешке из (1.26).



Слика 1.12.

1.2.3. Симпсоново правило 3/8

На сличан начин као што је изведено Симпсоново правило 1/3, (Лагранжов) интерполациони полином трећег реда може се искористити у једначини сличној (1.17), што води ка

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x=a}^b f(x) dx \approx \int_{x=a}^b f_3(x) dx = \\
 &= \int_{x=x_0}^{x_3} \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3) \right) dx, \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

а након интеграције добија се

$$I \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)), \quad (1.28)$$

при чему је $h = (b-a)/3$. Претходна једначина назива се Симпсоновим правилом 3/8, пошто се h множи са 3/8, а представља трећу Њутн-Котесову интеграциону формулу затвореног типа. Симпсоново правило 3/8 може се написати и у облику (1.6)

$$I \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}. \quad (1.29)$$

Према томе, отежана средња вредност функције рачуна се тако што се два унутрашњим тачкама придружује тежински коефицијент 3/8, док се крајњим тачкама придружује тежински коефицијент 1/8. Грешка Симпсоновог правила 3/8 је

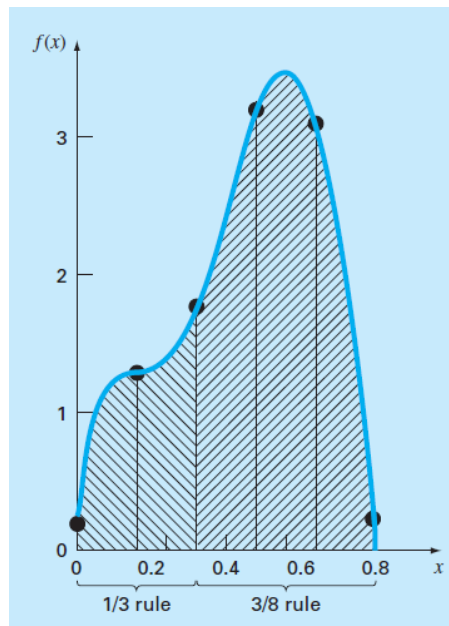
$$e = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad (1.30)$$

односно након замене $h = (b-a)/3$,

$$e = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \quad (1.31)$$

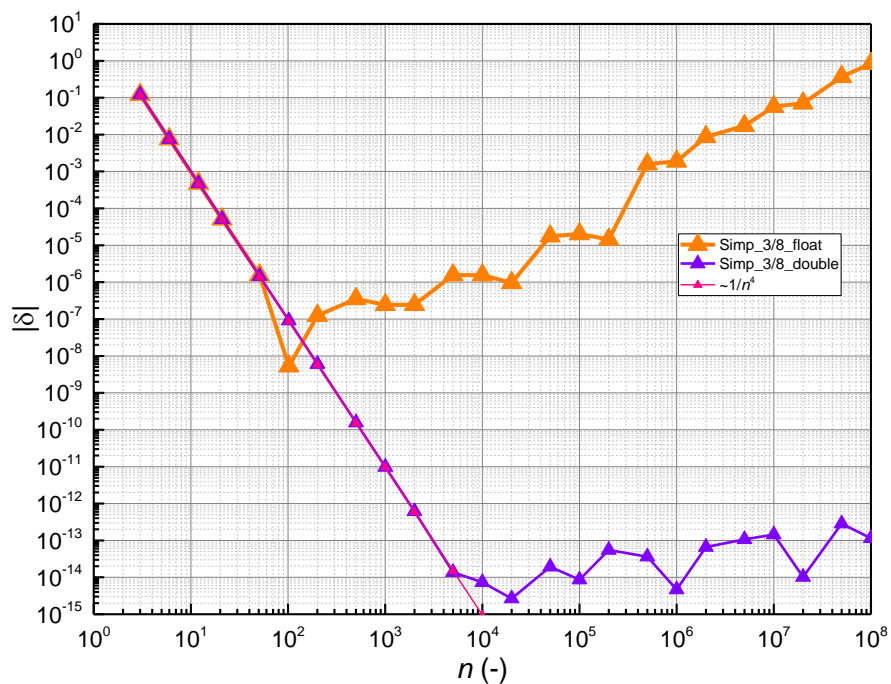
при чему је $a \leq \xi \leq b$. Због тога што је именилац израза (1.31) већи од имениоца израза (1.21) може се очекивати да је Симпсоново правило $3/8$ тачније од Симпсоновог правила $1/3$, међутим оба правила имају исту брзину конвергенције.

Симпсоново правило $1/3$ је обично префериран метод због тога што постиже тачност трећег реда помоћу три тачке интеграције, за разлику од Симпсоновог правила $3/8$ коме су за тачност истог реда потребне четири тачке нумеричке интеграције. Са друге стране, Симпсоново правило $3/8$ користи се када је број сегмената нумеричке интеграције непаран. Као пример, на слици 1.13 приказана је ситуација када је број интеграционих сегмената пет. Тада се на прва два интеграциона сегмента може применити Симпсоново правило $1/3$, а на последња три Симпсоново правило $3/8$. На тај начин комплетна интеграција спроведена је са тачношћу трећег реда, што је боље него да се у истом примеру користило трапезно правило.



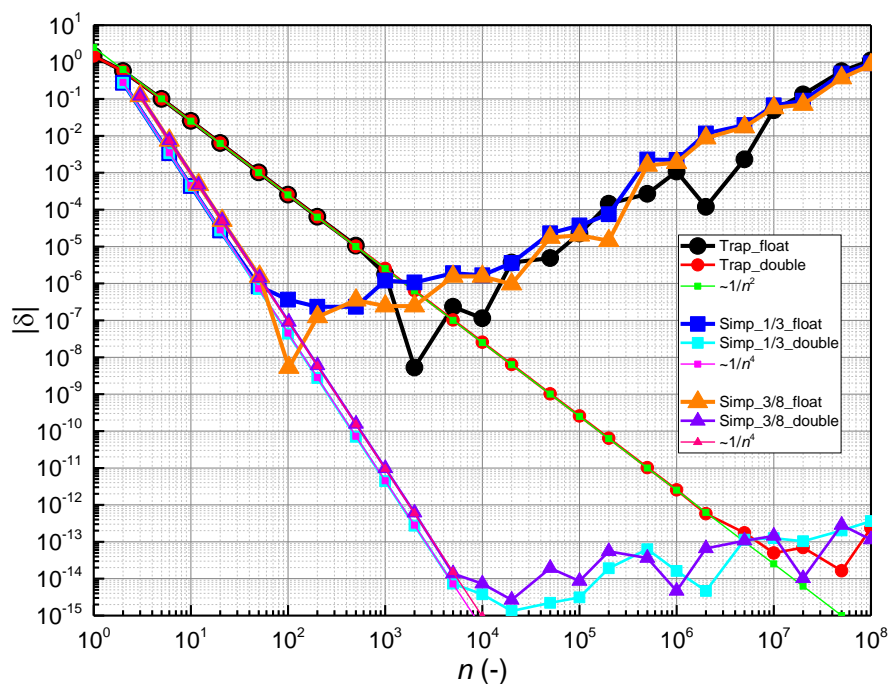
Слика 1.13.

На слици 1.14 приказани су резултати за исти пример као и на слици 1.9, само што се сада користи Симпсоново правило $3/8$. На слици је приказана и функција која опада пропорционално са четвртим степеном броја сегмената (n), која описује процену грешке из (1.26).



Слика 1.14.

На слици 1.15 дат је упоредни приказ за трапезно правило, Симпсоново правило 1/3 и Симпсоново правило 3/8.



Слика 1.15.

1.2.4. Њутн-Котесове интеграционе формуле вишег реда

Као што је раније напоменуто, трапезно правило и обе варијанте Симпсоновог правила су посебни случајеви формула за интеграцију познатих под називом Њутн-Котесове интеграционе формуле затвореног типа. Неке од Њутн-Котесових формула приказане су у табели 1.16, заједно са проценом грешке.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b-a) \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a) \frac{19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)}{288}$	$-(275/12,096)h^7 f^{(6)}(\xi)$

Табела 1.16.

Згоднo је приметити да као што је био случај за Симпсоново правило 1/3 и Симпсоново правило 3/8, Њутн-Котесове формуле које користе пет и шест тачака интеграције имају грешку истог реда. Ово генерално важи и за Њутн-Котесове формуле вишег реда и води ка закључку да се формуле које користе паран број сегмената (односно непаран број интеграционих тачака), као што су Симпсоново правило 1/3 и Булово правило чешће користе.

На крају, важно је напоменути да се у инжењерској пракси Њутн-Котесове формуле високог реда (са више од четири интеграционе тачке) ретко користе. Симпсонова правила обично су довољно тачна за већину инжењерских примена, а њихова тачност може се повећати вишеструком применом (поделом интеграционог сегмента на подсегменте). Финално, када је потребна висока тачност нумеричке интеграције, користе се методи као што су Ромбергова интеграција и Гаусове квадратурне формуле, који ће бити приказани у другом поглављу.

1.3. Вишеструки интеграл

Вишеструки интеграл често се сусрећу у инжењерској пракси. Примера ради, општа формула за прорачун средње вредности функције две променљиве може се написати у облику

$$\bar{f} = \frac{\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy}{(d-c)(b-a)}, \quad (1.32)$$

а бројилац претходног израза назива се двоструки интеграл.

Методи описани у овом поглављу (као и у наредном поглављу) могу се једноставно применити на вишеструке интеграле. Ово се може описати на једноставном примеру двоструког интеграла функције над правоугаоним доменом.

Присетимо се из математичке анализе да се вредност вишеструких интеграла не мења ако се редослед интеграције замени

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (1.33)$$

Према томе, прво се прорачунава једноструки интеграл, а након тога та вредност се користи за прорачуне следећег једноструког интеграла. На основу (1.33) јасно је да редослед интеграције није важан.

Нумеричка интеграција двоструких (и вишеструких) интеграла заснована је на истој идеји. Прво се користећи се неким од метода из овог и наредног поглавља (вишеструко трапезно или Симпсоново правило) прорачуна први (унутрашњи) једноструког интеграла, при чему се независна променљива друге интеграције држи константном. Након тога исти метод се примењује за интеграцију по следећој независној променљивој.

2. Интеграција једначина

Функције које ће се нумерички интегралити могу бити у једном од два облика: у облику табелираних података и у облику функција. У ком облику се налазе има значајну улогу на избор начина нумеричке интеграције. За табелиране податке, нумерички метод ограничен је на број и позицију тачака које су дате у табели. Са друге стране, ако је на располагању функција, може се генерисати произвољан број њених вредности $f(x)$ у произвољним тачкама x .

Ово поглавље посвећено је трима методама које су прилагођене за нумеричку интеграцију када је подинтегрална функција дата у облику функције. Први метод заснован је на Ричардсоновој екстраполацији која представља метод за комбинацију два нумеричка решења интеграла како би се добило треће, тачније решење. Ефикасан нумерички алгоритам за имплементацију Ричардсонове екстраполације назива се Ромбергова интеграција. Овај метод је рекурзиван и може се искористити за нумерички прорачун интеграла са предефинисаном тачношћу.

Други метод, адаптивна интеграција, заснива се на подели интеграционог интервала на сукцесивно мање делове на рекурзиван начин. Према томе, финија просторна подела користи се на деловима где функција има већу динамику, а грубља подела на деловима где функција има спорију промену. На овај начин постиже се жељена глобална тачност уз најмање заузеће рачунарских ресурса.

Трећи начин назива се Гаусова квадратурна формула. За разлику од метода разматраних до сад, код којих није спроведена посебна пажња приликом избора тачака нумеричке интеграције, код Гаусових квадратурних формула тачке нумеричке интеграције x_i бирају се између граница интеграла a и b на такав начин да се добије што је могуће тачније нумеричко решење интеграла.

2.1. Ромбергова интеграција

Ромбергова интеграција је техника ефикасне нумеричке интеграције функција. Слична је техникама описаним у претходном поглављу у смислу да је заснована на сукцесивним применама трапезног правила. Ипак, кроз математичке манипулације, у односу на трапезно правило могу се добити тачнији резултати уз мање заузеће рачунарских ресурса.

2.1.1. Ричардсонова екстраполација

Метод познат под називом Ричардсонова екстраполација користи два нумеричка решења интеграла како би се прорачунало треће тачније решење.

Нумеричко решење и грешка настала вишеструком применом трапезног правила може се написати у облику

$$I = I(h) + e(h), \quad (2.1)$$

при чему је I тачно решење интеграла, $I(h)$ је нумеричко решење добијено применом трапезног правила на n сегмената дужине $h = (b-a)/n$, а $e(h)$ је грешка нумеричког решења. Ако исти интеграл решимо користећи сегменте различитих дужина, h_1 и h_2 , на основу израза (2.1) мора важити

$$I(h_1) + e(h_1) = I(h_2) + e(h_2). \quad (2.2)$$

Ако се подсетимо израза за процену грешке вишеструке примене трапезног правила, односно заменом $h = (b-a)/n$ у израз (1.15) добијамо израз

$$e(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''', \quad (2.3)$$

при чему је \bar{f}''' средња вредност других извода функције на подсегментима интеграције, дефинисана у (1.14). Ако претпоставимо да се \bar{f}''' не мења значајно са променом корака интеграције, односно са бројем сегмената n , односно да се \bar{f}''' може сматрати приближно једнаким за два корака интеграције, на основу израза (2.3) може се проценити количник грешака за два различита корака нумеричке интеграције

$$\frac{e(h_1)}{e(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}. \quad (2.4)$$

Претходни израз омогућава нам да из израза за грешку уклонимо непознати члан $\overline{f''}$. Заменом (2.4) у једначину (2.2) добијамо

$$I(h_1) + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 e(h_2) \approx I(h_2) + e(h_2) \quad (2.5)$$

из кога се може одредити $e(h_2)$ као

$$e(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}. \quad (2.6)$$

Према томе, претходни израз даје процену грешке на основу два нумеричка решења интеграла и на основу корака нумеричке интеграције. Претходни израз може се заменити у израз (2.1) како би се добило

$$I = I(h_2) + e(h_2) \approx I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1} (I(h_2) - I(h_1)). \quad (2.7)$$

Може се показати да је грешка претходне формуле реда $O(h^4)$. Према томе, комбинацијом два трапезна правила чија је грешка реда $O(h^2)$ применом формуле (2.7) добија се нумеричка вредност интеграла чија је грешка реда величине $O(h^4)$. За посебан случај када је дужина подсегмента у свакој следећој итерацији дупло краћа ($h_2 = h_1/2$ у претходним формулама), претходна једначина постаје

$$I \approx I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1} (I(h_2) - I(h_1)), \quad (2.8)$$

односно након сређивања израза

$$I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1). \quad (2.9)$$

Једначина (2.7) представља начин да се комбинујући два решења добијена применом трапезног правила са грешком реда $O(h^2)$ добије трећи интеграл чија је грешка реда $O(h^4)$. Овај приступ је подскуп општијег правила комбиновања интеграла како би се побољшала тачност. На пример, ако се применом трапезног правила за три различита корака интеграције добију три решења тачности реда $O(h^2)$, комбиновањем ових решења на начин као у (2.9) добијају се два нумеричка решења тачности реда $O(h^4)$. Ова два решења могу се даље искомбиновати на сличан начин, како би се добило решење тачности реда $O(h^6)$. У посебном случају када су оригинална трапезна правила примењена на сегментима чија се дужина сукцесивно полови, једначина за прорачун интеграла која резултује грешком реда $O(h^6)$ је

$$I \approx \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l \quad (2.10)$$

при чему су I_m и I_l тачније и мање тачно решење чија је грешка реда величине $O(h^4)$, респективно. Слично овоме, два решења чија је грешка реда величине $O(h^6)$ могу се искомбиновати како би се добило решење чија је грешка реда величине $O(h^8)$ помоћу формуле

$$I \approx \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l. \quad (2.11)$$

2.1.2. Ромбергов интеграциони алгоритам

Приметимо да је збир коефицијената развоја у једначинама (2.9), (2.10), односно (2.11) једнак јединици. Ти коефицијенти могу се посматрати као тежински коефицијенти који фаворизују решење више тачности (I_m) са порастом тачности нумеричког решења. Ове формуле могу се написати у општем облику који је погодан за имплементацију на рачунару

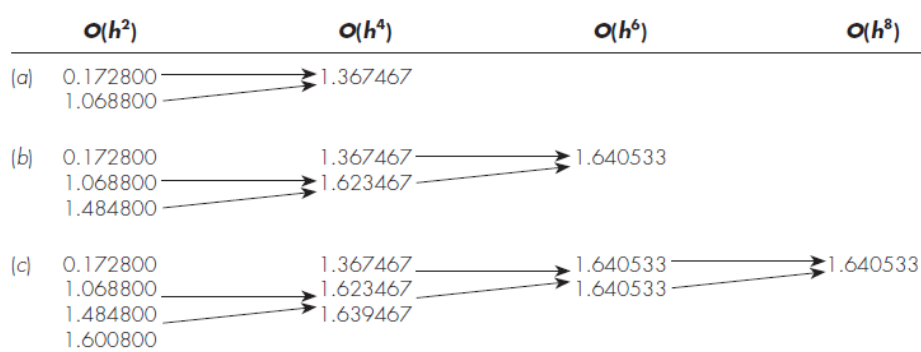
$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{j+1,k-1} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{j,k-1}, \quad (2.12)$$

при чему $I_{j+1,k-1}$ и $I_{j,k-1}$ представљају тачније и мање тачно решење добијено у претходној ($k-1$) итерацији, а $I_{j,k}$ представља побољшано решење добијено у итерацији број k . Према томе k представља ниво интеграције, при чему $k=1$ одговара оригиналном трапезном правилу (чија је грешка реда $O(h^2)$), $k=2$ одговара следећем нивоу интеграције, чија је грешка реда $O(h^4)$, $k=3$ решењу чија је грешка реда $O(h^6)$, и тако даље. У ствари за ниво интеграције k , грешка интеграције је реда $O(h^{2k})$. Индекс j користи се да се разликују тачније ($j+1$) и мање тачно решење (j) у оквиру истог нивоа интеграције. На пример, за $k=2$ и $j=1$, једначина (2.12) постаје

$$I_{1,2} \approx \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1}, \quad (2.13)$$

што је еквивалентно једначини (2.9).

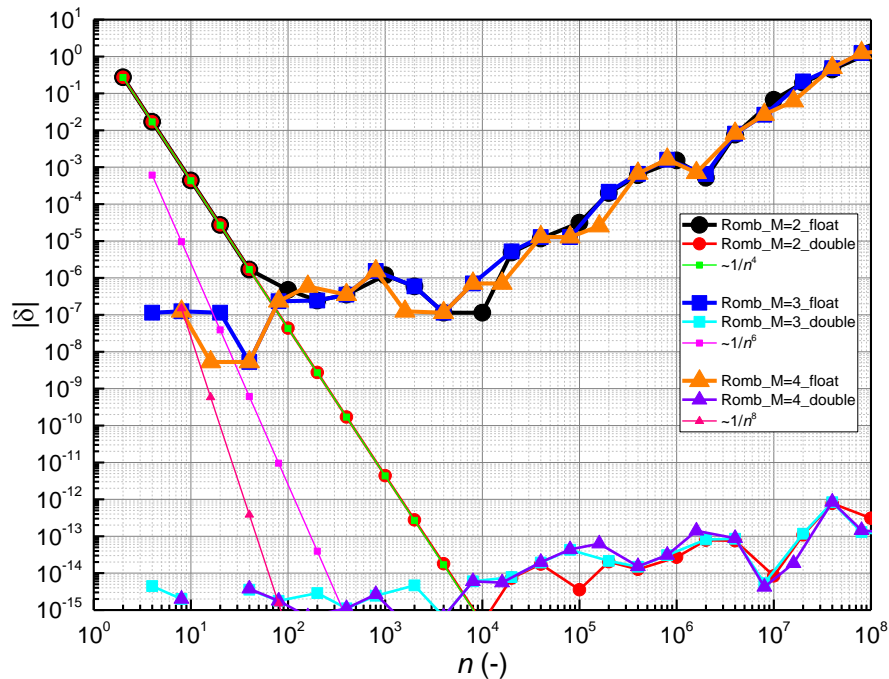
Општа једначина облика (2.12) назива се Ромбергова интеграциона формула. На слици 2.1 приказана је графичка представа поступака процене интеграла коришћењем овог приступа.



Слика 2.1.

Ромбергова интеграција ефикаснија је од директне примене трапезног правила и Симпсоновог правила, приказаних у претходном поглављу.

На слици 2.2 приказани су резултати за исти пример као и на слици 1.9, само што се сада користи Ромбергова интеграција. На слици су приказане и функције које опадају пропорционално са четвртим, шестим и осмим степеном броја сегмената (n), која описује процену грешке за Ромбергову интеграцију у два нивоа ($M=2$), три нивоа ($M=3$) и четири нивоа ($M=4$), респективно.



Слика 2.2.

2.2. Адаптивне квадратурне формуле

Иако је Ромбергова интеграција ефикаснија од композитног Симпсоновог правила $1/3$, оба ова метода користе екидистантне тачке интеграције. На овај начин игнорише се чињеница да многе функције имају делове са великом динамиком, при чему се на другим деловима мењају благо.

Адаптивне квадратурне формуле излазе на крај са овиме тако што подешавају корак интеграције динамички функције која се интегралом у деловима функције са великом динамиком користе се краћи интеграциони сегменти, а у деловима функције са спорим променом користе се дужи интеграциони сегменти. Већина оваквих техника заснована је на примени композитног Симпсоновог правила $1/3$ на подинтервале на начин сличан као што је композитно трапезно правило примењено у оквиру Ричардсонове екстраполације. Конкретно, Симпсоново правило $1/3$ примени се на два нивоа уситњености интеграционих интервала, а разлика између ова два решења користи се за процену грешке интеграције. Ако је процена грешке у задовољавајућим границама, не спроводи се даље уситњавање интеграционих интервала, а добијено решење сматра се задовољавајуће тачним. Ако је процена грешке већа од задовољавајуће, корак интеграције се уситњава и процес се понавља све док се процена грешке не сведе на задовољавајући ниво. Финални интеграл се прорачунава као сума интеграла прорачунатих за сваки од подинтервала.

Теоријска основа овог приступа може се илустровати на примеру интеграла над сегментом од $x = a$ до $x = b$, са интеграционим кораком $h_1 = b - a$. Прва процена интеграла може се добити применом Симпсоновог правила $1/3$, које гласи

$$I(h_1) = \frac{h_1}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)), \quad (2.14)$$

при чему је $c = (a + b)/2$.

Као и у случају Ричардсонове интеграције, рафинирања процена може се добити половљењем корака интеграције, односно применом Симпсоновог правила $1/3$ за $n = 4$ сегмента, када се добија

$$I(h_2) = \frac{h_2}{6} (f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(g) + f(b)) \quad (2.15)$$

при чему је $d = (a + c)/2$ и $g = (c + b)/2$, односно $h_2 = h_1/2$.

Због тога што и $I(h_1)$ и $I(h_2)$ представљају нумеричко решење истог интеграла, њихова разлика може се посматрати као процена грешке, односно

$$e \approx I(h_2) - I(h_1), \quad (2.16)$$

а веза између тачног решења, решења добијеног нумеричком интеграцијом и грешке може се записати у облику (2.1), при чему је за композитно Симпсоново правило $1/3$ са n сегмената, корак интеграције $h = (b - a)/n$.

Користећи се сличним приступом као и код Ричардсонове екстраполације, може се одредити процена грешке рафинирањег решења $I(h_2)$ као функција разлике два нумеричка решења

$$e(h_2) = \frac{1}{15} (I(h_2) - I(h_1)). \quad (2.17)$$

Ову грешку могуће је додати решењу $I(h_2)$ у формулу облика (2.1) како би се генерисала још тачнија апроксимација решења

$$I \approx I(h_2) + \frac{1}{15} (I(h_2) - I(h_1)) = \frac{16}{15} I(h_2) - \frac{1}{15} I(h_1). \quad (2.18)$$

Претходна формула еквивалентна је Буловом правилу.

2.3. Гаусове квадратурне формуле

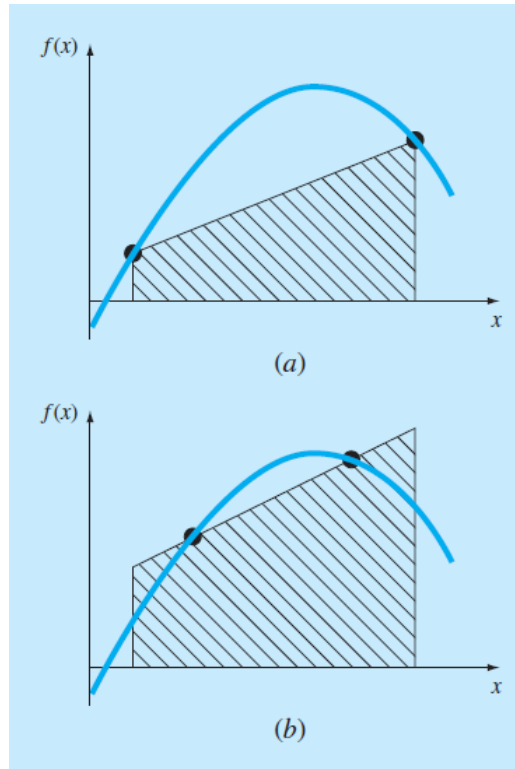
У претходном поглављу разматрали смо групу формула нумеричке интеграције познату под називом Њутн-Котесове интеграционе формуле. Оно што је карактеристично за ове формуле је да се интеграл прорачунава на основу вредности функције у екидистантним тачкама. Последице, локација тачака интеграције у овим формулама је предефинисана, односно фиксна.

На пример, као што је приказано на слици 2.3(а), трапезно правило засновано је на апроксимацији интеграла површином испод праве линије која повезује вредности функције на крајевима интеграционог интервала. Формула која се користи за прорачун ове површине је

$$I \approx (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad (2.19)$$

при чему су a и b границе интеграционог интервала, а $b-a$ је његова дужина. Због тога што у трапезном правилу прави сегмент мора проћи кроз вредности функције на крајевима домена, постоје случајеви када трапезно правило резултује великом грешком, као на слици 2.3(a).

Претпоставимо сада да не постоји ограничење да тачке интеграције морају бити на границама домена и да се оне могу померати произвољно дуж интеграционог интервала како би површина испод дужи која пролази кроз те тачке што боље описивала тражени интеграл. Мудрим избором позиције ових тачака, може се пронаћи дуж која пролази кроз одговарајуће вредности функције тако да се позитивне и негативне грешке скрате. На основу овога, као што је приказано на слици 2.3(б), може се повећати тачност нумеричког прорачуна интеграла.



Слика 2.3.

Гаусове квадратурне формуле су назив за једну класу техника која би требало да имплементира приступ из претходног пасуса. Гаусове квадратурне формуле приказане у овом одељку називају се Гаус-Лежандрове формуле. Пре него опишемо ове формуле, показаћемо како се нумеричке интеграционе формуле као што су трапезно правило могу добити применом метода неодређених коефицијената. Овај метод биће затим искоришћен за конструкцију Гаус-Лежандрових формула.

2.3.1. Метод неодређених коефицијената

У претходном поглављу извели смо трапезно правило интеграцијом линеарне интерполационе функције, односно на основу геометрије. Метод неодређених коефицијената нуди трећи начин који се такође може искористити за конструкцију и других интеграционих техника као што су Гаусове квадратурне формуле.

Како бисмо илустровали овај приступ, једначину (2.19) написаћемо на другачији начин

$$I \approx c_0 f(a) + c_1 f(b), \quad (2.20)$$

при чему су c_0 и c_1 константе. Пођимо даље од чињенице да трапезно правило резултује тачним прорачуном интеграла када је подинтегрална функција константна, односно линеарна. Две једноставне функције које задовољавају ова правила су $f(x)=1$ и $f(x)=x$, које су илустроване на слици 2.4. На основу претходног закључка, следеће две једнакости морају бити задовољене

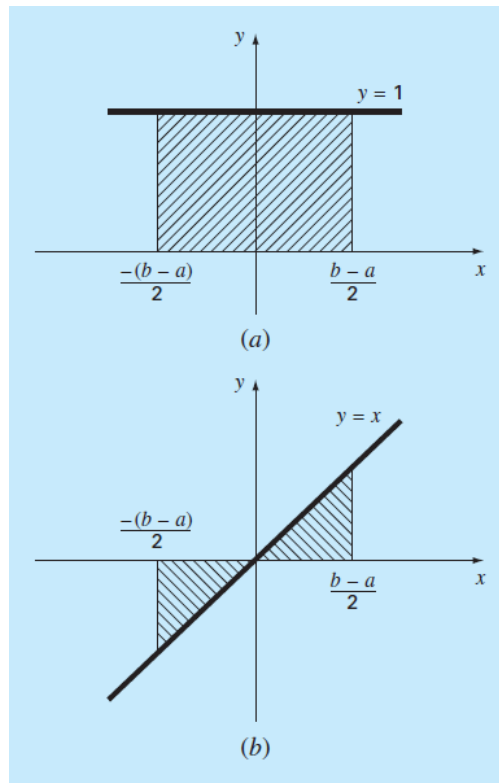
$$c_0 + c_1 = \int_{x=-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1 dx = b - a \text{ и} \quad (2.21)$$

$$-c_0 \frac{b-a}{2} + c_1 \frac{b-a}{2} = \int_{x=-(b-a)/2}^{(b-a)/2} x dx = 0. \quad (2.22)$$

Решење система једначина (2.21) и (2.22) добијамо

$$c_0 = c_1 = (b-a)/2, \quad (2.23)$$

што након замене у једначину (2.20) резултује трапезним правилом (1.5).



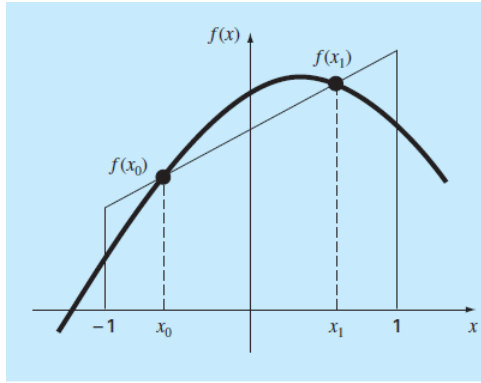
Слика 2.4.

2.3.2. Извођење Гаус-Лежандрове интеграционе формуле у две тачке

Слично као и у претходном извођењу трапезног правила, циљ Гаусове квадратурне формуле је одређивање коефицијената c_0 и c_1 у једначини облика

$$I \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1), \quad (2.24)$$

са том разликом што се и позиције тачака интеграције x_0 и x_1 могу изабрати произвољно тако да је $a \leq x_0, x_1 \leq b$, као на слици 2.5. Према томе, сада имамо четири непознате (c_0 , c_1 , x_0 и x_1), односно потребна су нам четири услова да бисмо их одредили. Узећемо да је $a = -1$ и $b = 1$.



Слика 2.5.

Слично као и приликом извођења трапезног правила, два услова можемо добити захтевајући да Гаусова квадратурна формула даје тачно решење ако је подинтегрална функција константна, односно линеарна. Како бисмо добили додатна два услова, наставићемо са овим резонавањем и захтеваћемо да Гаусова квадратурна формула (2.24) даје тачно решење и за функцију облика параболе ($f(x) = x^2$) и за кубну функцију ($f(x) = x^3$). Четири једначине постају

$$c_0 + c_1 = \int_{x=-1}^1 1 dx = 2, \quad (2.25)$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = \int_{x=-1}^1 x dx = 0, \quad (2.26)$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \int_{x=-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \text{ и} \quad (2.27)$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = \int_{x=-1}^1 x^3 dx = 0. \quad (2.28)$$

Једно решење² ових једначина је $c_0 = c_1 = 1$ и $x_0 = -x_1 = -1/\sqrt{3}$, што финално води ка Гаус-Лежандровој формули у две тачке

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (2.29)$$

На основу овога долазимо до занимљивог закључка да сабирањем вредности функција у координатама $x_0 = -1/\sqrt{3}$ и $x_1 = 1/\sqrt{3}$ резултује прорачуном интеграла на интервалу $-1 \leq x \leq 1$ који има трећи ред тачности.

У једначинама од (2.24) до (2.29) претпостављено је да се интеграциони интервал простире од $a = -1$ до $b = 1$. Ово је урађено како би се поједноставио прорачун коефицијената c_0 и c_1 , као и тачака интеграције x_0 и x_1 , односно да би се добила најопштија могућа формула. У случају да су границе интеграције другачије, сменом променљивих интеграл се увек може свести на интервал од -1 до 1 . На пример, ако се решава интеграл

$$I = \int_{x=a}^b f(x) dx \quad (2.30)$$

при чему је $a \neq -1$ и $b \neq 1$, може се увести помоћне променљива x_d која задовољава

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_d, \quad (2.31)$$

² Друго решење $c_0 = c_1 = 1$ и $x_0 = -x_1 = 1/\sqrt{3}$ води ка истој квадратурној формули, па га због тога нема потребе посебно разматрати.

а из претходне једначине очигледно је да је $x = a$ када је $x_d = -1$, односно да је $x = b$ када је $x_d = 1$. Из претходне релације може се наћи веза између диференцијала променљиве x и променљиве x_d која гласи

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d, \quad (2.32)$$

односно x_d се може изразити преко x као

$$x_d = \frac{2x-a-b}{b-a}. \quad (2.33)$$

Сменама (2.32) и (2.33) у интеграл (2.30), интеграл се може свести на облик

$$I = \int_{x_d=-1}^1 f(x_d) \frac{b-a}{2} dx_d \quad (2.34)$$

на који се могу применити стандардне Гаус-Лежандрове формуле. Смене (2.32) и (2.33) врше промену границе интеграла без промене вредности самог интеграла.

2.3.3. Гаус-Лежандрове формуле са више тачака

Осим Гаус-Лежандрове формуле у две тачке, развијене у претходном одељку, формуле са више тачака могу се развити полазећи од општег израза

$$I \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_{n-1} f(x_{n-1}), \quad (2.35)$$

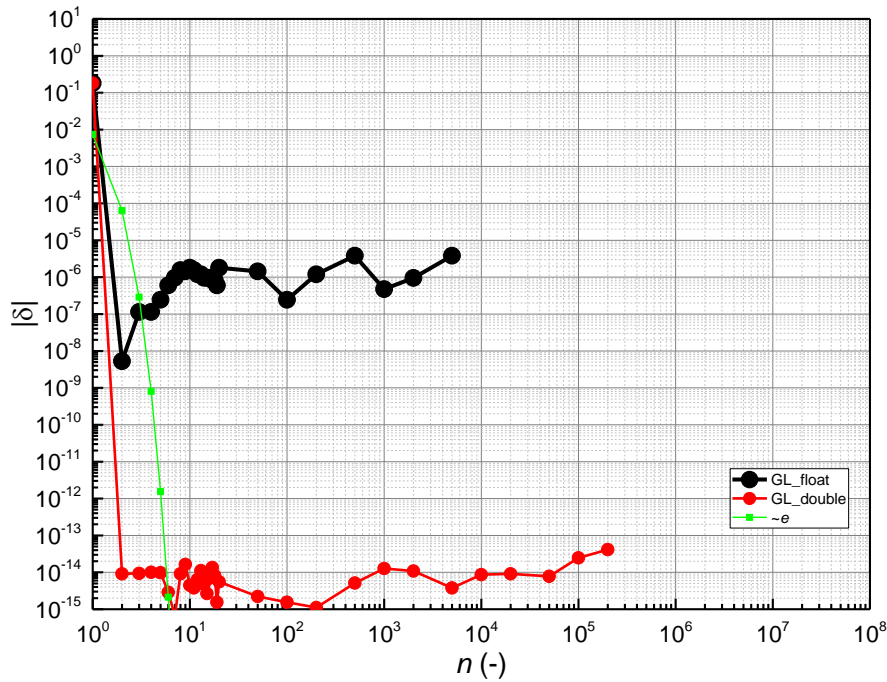
при чему је n број тачака интеграције. Вредности тачака нумеричке интеграције x_i и коефицијената c_i ($0 \leq i \leq n-1$) приказане су у табели 2.5 закључно са интеграцијом у шест тачака³.

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
2	$c_0 = 1.0000000$ $c_1 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$	$\approx f^{(4)}(\xi)$
3	$c_0 = 0.5555556$ $c_1 = 0.8888889$ $c_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = 0.774596669$	$\approx f^{(6)}(\xi)$
4	$c_0 = 0.3478548$ $c_1 = 0.6521452$ $c_2 = 0.6521452$ $c_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$	$\approx f^{(8)}(\xi)$
5	$c_0 = 0.2369269$ $c_1 = 0.4786287$ $c_2 = 0.5688889$ $c_3 = 0.4786287$ $c_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$	$\approx f^{(10)}(\xi)$
6	$c_0 = 0.1713245$ $c_1 = 0.3607616$ $c_2 = 0.4679139$ $c_3 = 0.4679139$ $c_4 = 0.3607616$ $c_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$	$\approx f^{(12)}(\xi)$

Табела 2.5.

На слици 2.6 приказани су резултати за исти пример као и на слици 1.9, само што се сада користи Гаус-Лежандрове интеграционе формуле. На слици је приказана и функција која опада пропорционално са предикцијом грешке из израза (2.36).

³ За остале случајеве погледати <https://keisan.casio.com/exec/system/1329114617> Табелиране вредности тачака и коефицијената Гаус-Лежандрове формула закључно са интеграцијом у 100 тачака могу се преузети са адресе <http://mtt.etf.bg.ac.rs/ms/AMK/Predavanja/GL.txt>.



Слика 2.6.

Због тога што Гаусове квадратурне формуле захтевају вредности функције у несквидинстантним тачкама, ове формуле нису погодне у ситуацији када је функција задата преко табеларних вредности. Са друге стране, када је функција позната и може се прорачунати у произвољној тачки, ефикасност Гаусових квадратурних формула може бити пресудни елемент за њихову примену, посебно када је потребан вишеструки прорачун интеграла.

2.3.4. Анализа грешке Гаусових квадратурних формула

Грешка Гаусових-Лежандрових квадратурних формула генерално се записује у облику

$$e = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3} f^{(2n+2)}(\xi), \quad (2.36)$$

при чему је n број тачака нумеричке интеграције умањен за један, а $f^{(2n+2)}(\xi)$ је извод реда $(2n+2)$ функције f која се интеграла над доменом $-1 \leq \xi \leq 1$. Поредећи једначину (2.36) и резултате из табеле 1.16 може се уочити супериорност Гаусових квадратурних формула у односу на Њутн-Котесове формуле, под условом да изводи функције f не расту значајно са порастом n .

За функције којима вредности расту са вишеструким изводима, а на основу (2.36), Гаус-Лежандрове формуле не морају бити најбољи избор. Један од оваквих примера је и решавање интеграла

облика $I = \int_{x=-3}^3 \frac{1}{1+x^2} dx$, када вишеструке примене Симпсновог правила или Ромбергове интеграције

дају тачније решење. Упркос овоме, за велики број функција које се сусрећу у инжењерској пракси, Гаусове квадратурне формуле представљају ефикасан начин за прорачун интеграла.