

1 Увод

У оквиру овог поглавља, на примеру расподеле напона дуж вода са губицима, приказаћемо формирање система једначина метода коначних елемената применом Галеркиновог метода. Галеркинов метод резултоваће истим системом једначина који смо добили и раније, када смо пошли од израза за снагу која се простире водом односно израза за снагу губитака, изразили ту снагу преко напона и када смо захтевали да нумеричко решење за напон буде такво да снага губитака буде минимална. Принцип формирања система једначина метода коначних елемената на тај начин (полазећи од снаге) припада класи варијационих метода које се данас ретко користе. Са друге стране, Галеркинов метод тренутно представља један од најчешће коришћених метода у оквиру метода коначних елемената и метода момената.

Након тога увешћемо функције базиса вишег реда које аутоматски обезбеђују континуалност нумеричког решења за напон. У ситуацијама када се методом коначних елемената решавају електромагнетски проблеми, аналогне функције базиса аутоматски обезбеђују континуалност тангенцијалне компоненте електричног поља на споју два коначна елемента, а такве функције базиса називају се ротор-комфорне (*curl-conforming basis functions*). На самом крају, кроз низ нумеричких примера сагледаћемо предности оваквих функција базиса.

2 Галеркинов метод

Посматрајмо вод подужне отпорности R' , подужне проводности G' и дужине L . Нека је вод постављен дуж z -осе Декартовог координатног система, нека се почетак вода налази у координати $z = -L$, а крај вода у координати $z = 0$. Нека је на почетку вода ($z = -L$) прикључен идеални напонски генератор сталне електромоторне силе E_0 , а нека је вод отворен на свом другом крају ($z = 0$). Као што је изведено раније, напон дуж вода задовољава диференцијалну једначину другог реда

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - R'G'U(z) = 0, \quad -L \leq z \leq 0, \quad (2.1)$$

а веза између напона и струје (за усаглашене референтне смерове гледано од генератора ка отвореном крају вода) је

$$I(z) = -\frac{1}{R'} \frac{dU(z)}{dz}. \quad (2.2)$$

Осим једначине (2.1) за једнозначно одређивање напона потребно је да на крајевима вода напон задовољава и следеће граничне услове:

$$U(z = -L) = E_0 \quad \text{и} \quad (2.3)$$

$$I(z = 0) = -\frac{1}{R'} \frac{dU(z=0)}{dz} = 0. \quad (2.4)$$

Поделимо сада вод на K коначних елемената дужине L_k , $k = 1, \dots, K$, при чему су границе коначног елемента k $z_{k,l}$ и $z_{k,r}$ ($z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}$, $L_k = z_{k,r} - z_{k,l}$). Апроксимативно (нумеричко) решење за напон дуж коначног елемента k , $U_{\text{FEM}}^{(k)}(z)$, можемо представити у облику суме производа познатих функција базиса $\alpha_i^{(k)}(z)$ и непознатих константи (коефицијената развоја) $U_i^{(k)}$, односно као

$$U_{\text{FEM}}^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{N_k} \alpha_i^{(k)}(z) U_i^{(k)}, \quad z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.5)$$

при чему N_k представља степен апроксимације непознатог напона дуж коначног елемента k . Функције базиса $\alpha_i^{(k)}$ различите су од нуле искључиво дуж коначног елемента k , а једнаке су нули дуж свих осталих коначних елемената. Комбинујући нумеричка решења за напон дуж свих коначних елемената добијамо нумеричко решење за напон дуж читавог вода, што се математички може записати као

$$U_{\text{FEM}}(z) = \sum_{k=1}^K U_{\text{FEM}}^{(k)}(z), \quad -L \leq z \leq 0. \quad (2.6)$$

Подсетимо се да су функције базиса које одговарају k -том коначном елементу дефинисане само у оквиру k -тог коначног елемента, а нула на местима осталих коначних елемената. Самим тим и напон $U_{\text{FEM}}^{(k)}(z)$ различит је од нуле, у општем случају, само дуж k -тог коначног елемента, па израз (2.6) треба схватити на начин да укупан напон $U_{\text{FEM}}(z)$ представља унију напона $U_{\text{FEM}}^{(k)}$, а не да сумирање треба спровести у свакој тачки за сваку функцију базиса.

Нумеричко решење за напон дуж вода, у општем случају, разликоваће се од егзактног решења, при чему ће разлика између нумеричког и егзактног решења постајати све мања и мања са повећањем тачности нумеричког решења. Математички формално ово се може записати као $U(z) \approx U_{\text{FEM}}(z)$, при чему је $U(z)$ егзактно решење једначине (2.1) и граничних услова (2.3) и (2.4), а након замене претходне приближне једнакости у једначину (2.1) добијамо да нумеричко решење за напон приближно задовољава ту диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 U_{\text{FEM}}(z)}{dz^2} - R'G'U_{\text{FEM}}(z) \approx 0, \quad -L \leq z \leq 0. \quad (2.7)$$

Претходна једначина може се написати и у облику

$$\frac{d^2 U_{\text{FEM}}(z)}{dz^2} - R'G'U_{\text{FEM}}(z) = \delta(z), \quad -L \leq z \leq 0, \quad (2.8)$$

при чему $\delta(z)$ представља резидуал (остатак) једначине (2.7). Са повећањем тачности нумеричког решења U_{FEM} , резидуал у једначини (2.8) постајаће све мањи и мањи. У општем случају резидуал из једначине (2.8) не може бити идентички једнак нули, односно не може важити $\delta(z)=0$, $-L \leq z \leq 0$, јер би тада нумеричко решење било једнако егзактном решењу, односно важило би $U_{\text{FEM}}(z)=U(z)$, $-L \leq z \leq 0$, што у општем случају није могуће постићи са коначним бројем функција базиса. Због тога се уместо захтева $\delta(z)=0$, захтева да отежана средња вредност резидуала буде једнака нули, односно захтева се да важи

$$\int_{z=-L}^0 \delta(z)\beta(z)dz = 0, \quad (2.9)$$

при чему је $\beta(z)$ позната (унапред задата) функција тестирања (*testing function*), односно тежинска функција у прорачуну средње вредности. Пошто је апроксимативни напон описан помоћу $N_{\text{dis}} = \sum_{k=1}^K (N_k + 1)$ непознатих коефицијената¹, потребно је формирати одговарајући број једначина на основу којих се ти коефицијенти могу одредити. У ту сврху у једначини (2.9) користи се N_{dis} различитих тест функција $\beta(z)$, при чему свака доприноси са по једном једначином по непознатим коефицијентима развоја напона U_{FEM} . Овакав начин решавања диференцијалних једначина назива се метод отежаних средњих резидуала (*method of mean weighted residuals*). Када се метод отежаних средњих резидуала искомбинује са поделом комплетног проблема на коначан број коначних елемената (у оквиру метода коначних елемената) добија се врло свестран и способан апарат за решавање произвољних диференцијалних једначина, односно инжењерског проблема описаног тим једначинама.

У оквиру Галеркиновог метода тест функције идентичне су функцијама базиса, односно у оквиру Галеркиновог метода важи $\beta(z) = \alpha_j^{(k)}(z)$, $1 \leq k \leq K$, $0 \leq j \leq N_k$. Полазећи од једначине (2.9), након примене Галеркиновог метода и користећи се једначином (2.8) добијамо

$$\int_{z=-L}^0 \frac{d^2 U_{\text{FEM}}}{dz^2} \alpha_j^{(k)} dz - \int_{z=-L}^0 R'G'U_{\text{FEM}} \alpha_j^{(k)} dz = 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 0 \leq j \leq N_k, \quad (2.10)$$

при чему смо изоставили експлицитну ознаку за зависност функција од z -координате како бисмо запис учинили компактним.

¹ Ознаку “dis” увели смо како бисмо разликовали величине које се односе на неповезани систем једначина (*disconnected system of equations*) и величине које се односе на повезани систем једначина (*connected system of equations*) који ћемо увести касније и за који ћемо користити ознаку “con”.

Ако бисмо покушали да директно решимо једначину (2.10) методом коначних елемената, а како подинтегрална функција под првим интегралом у том изразу не би била сингуларна², било би неопходно да конструишемо функције базиса које ће обезбедити како континуалност апроксимативног напона U_{FEM} тако и континуалност његовог првог извода дуж читавог домена над којим се решава проблем (у нашем случају за $-L \leq z \leq 0$). Ово је доста строг услов који се поставља пред функције базиса што додатно отежава њихову конструкцију. Како би се ова потешкоћа избегла, односно како бисмо спустили ред извода под првим интегралом у изразу (2.10), на тај интеграл ћемо применити парцијалну интеграцију. Након парцијалне интеграције првог интеграла из израза (2.10) добијамо

$$\int_{z=-L}^0 \frac{dU_{\text{FEM}}}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz} dz + \int_{z=-L}^0 R'G'U_{\text{FEM}}\alpha_j^{(k)} dz = \left(\alpha_j^{(k)} \frac{dU_{\text{FEM}}}{dz} \right) \Big|_{z=-L}^0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (2.11)$$

Обратимо пажњу да су границе првог интеграла у изразу (2.11) и границе у члану са десне стране те једнакости повезани према правилу парцијалне интеграције, односно да евентуална промена граница интеграције у првом интегралу у изразу (2.11) мора бити праћена одговарајућим променама граница у члану са десне стране те једнакости.

У изразу (2.11) на чланове под првим интегралом, апроксимативни напон U_{FEM} и тест функцију $\alpha_j^{(k)}$ делује први извод, а довољан услов да подинтегрална функција тог интеграла не буде сингуларна је да функције базиса, а самим тим и апроксимативни напон, буду континуалне функције дуж читавог домена $-L \leq z \leq 0$. Апроксимативни напон U_{FEM} конструиран је помоћу функција базиса дуж свих коначних елемената, а погодним избором тих функција базиса апроксимативни напон може се учинити континуалним. Са друге стране, функције базиса, а самим тим и тест функције $\alpha_j^{(k)}$ различите су од нуле само дуж коначног елемента k и једнаке су нули дуж осталих коначних елемената. Због тога тест

функција $\alpha_j^{(k)}$ поседује прекид на границама коначног елемента k , па је самим тим функција $\frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz}$ под првим интегралом у (2.11) сингуларна на граници коначног елемента k . Због тога ћемо, као што ће бити приказано у наставку, приликом тестирања тест функцијом $\alpha_j^{(k)}$ границе интеграла из израза (2.11)

променити тако да обухвате само елемент k , а допринос интегралу од сингуларног члана $\frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz}$ на граници коначног елемента k узећемо кроз промену граница у члану са десне стране једнакости (2.11).

У том члану појављује се производ тест функције $\alpha_j^{(k)}$ и извода апроксимативног напона $\frac{dU_{\text{FEM}}^{(k)}}{dz}$.

Пошто сматрамо да ћемо функцијама базиса обезбедити да је апроксимативни напон U_{FEM} континуалан за $-L \leq z \leq 0$, израз $\frac{dU_{\text{FEM}}^{(k)}}{dz}$ на споју два коначна елемента може имати прекид, али не може бити сингуларан, што би отежало прорачун граничних вредности у члану са десне стране израза (2.11).

Функције базиса вишег реда, које ћемо представити у наредном поглављу, у оквиру једног коначног елемента конструишаћемо помоћу полинома, па ће дуж једног коначног елемента аутоматски бити задовољена континуалност напона U_{FEM} . Посебном процедуром која ће тада бити приказана биће задовољена континуалност напона U_{FEM} и на споју два коначна елемента. Приметимо да у односу на случај директног решавања једначине (2.10), приликом решавања једначине (2.11) није неопходно водити рачуна о континуалности извода напона U_{FEM} , односно континуалности извода функција базиса дуж коначних елемената и на спојевима коначних елемената.

Због тога што су тест функције $\alpha_j^{(k)}$ једнаке нули дуж свих коначних елемената изузев елемента k ($z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}$), самим тим дуж тих елемената биће једнаки нули и изводи тест функција. Због тога се границе интеграције у изразу (2.11) могу сузити са $-L \leq z \leq 0$ на $z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}$ а да се вредности

² Ако би у посматраном интегралу подинтегрална функција била сингуларна, у зависности од типа сингуларитета, то би водило или ка томе да се посматрани интеграл не може решити, или ка томе да се ти сингуларни чланови морају експлицитно прорачунати и укључити у интеграцију, што даље води ка додатним потешкоћама.

интеграла не промене. При томе апроксимативни напон U_{FEM} под интегралима постаје $U_{\text{FEM}} = U_{\text{FEM}}^{(k)}$, а подсетимо се да промена граница интеграције у првом интегралу из (2.11) мора бити праћена истом променом граница у члановима са десне стране те једнакости. Након свега овога израз (2.11) постаје

$$\int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} \frac{dU_{\text{FEM}}^{(k)}}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz} dz + R'G' \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} U_{\text{FEM}}^{(k)} \alpha_j^{(k)} dz = \left(\alpha_j^{(k)} \frac{dU_{\text{FEM}}}{dz} \right) \Big|_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (2.12)$$

У претходном изразу сматрали смо да су подужна отпорност и подужна проводност константне дуж посматраног коначног елемента, па смо R' и G' извукли испред интеграла. Метод коначних елемената може се искористити и за моделовање континуално нехомогених средина, а у нашем конкретном примеру то би одговарало ситуацији када би се подужна отпорност и подужна проводност мењали дуж коначног елемента, односно када бисмо R' и G' морали да оставимо под интегралом у изразу (2.12).

Напон $U_{\text{FEM}}^{(k)}$ под интегралима у (2.12) може се представити у облику развоја (2.5), а након замене редоследа сумирања и интеграције добијамо финални израз на основу кога ћемо формирати систем линеарних једначина по непознатим коефицијентима развоја $U_i^{(k)}$ који гласи

$$\sum_{i=0}^{N_k} \left(U_i^{(k)} \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz} dz \right) + R'G' \sum_{i=0}^{N_k} \left(U_i^{(k)} \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)} dz \right) = \left(\alpha_j^{(k)} \frac{dU_{\text{FEM}}}{dz} \right) \Big|_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (2.13)$$

Развој (2.5) нисмо применили на чланове са десне стране једначина (2.12) и (2.13), пошто ћемо те чланове анулирати приликом формирања повезаног система једначина поступком који ће бити приказан касније.

2.1 Функције базиса вишег реда

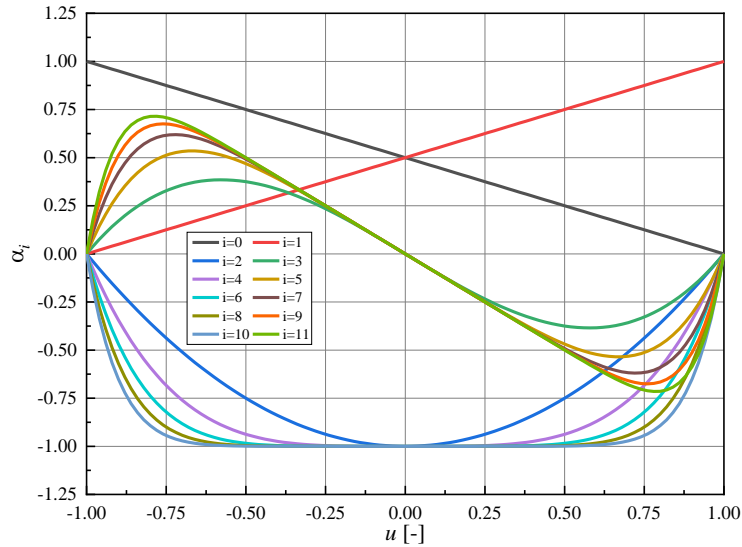
У оквиру овог поглавља увешћемо функције базиса вишег реда. Посматраћемо конкретан пример одређивања напона дуж вода са губицима, а полазећи од овог једноставног примера функције базиса вишег реда могу се развити и за описивање произвољно сложених инжењерских проблема.

Функције базиса вишег реда поседују два важна својства. На првом месту омогућавају да се непознати напон у оквиру једног коначног елемента представити линеарном комбинацијом полинома произвољно високог реда. На овај начин у оквиру сваког коначног елемента добија се више степени слободе за описивање непознатог напона, а полиномима задовољавајуће високог реда могу се релативно тачно моделовати и брзе промене напона дуж вода. На другом месту, функције базиса вишег реда које ћемо приказати конструисане су на такав начин та се њиховом применом релативно лако може обезбедити континуалност напона дуж вода. Подсетимо се да је то услов који мора бити задовољен у изразима (2.11), (2.12) и (2.13).

Функције базиса дефинисаћемо на родитељском елементу чија се локална координата u простире у границама $-1 \leq u \leq 1$, а њихов облик је

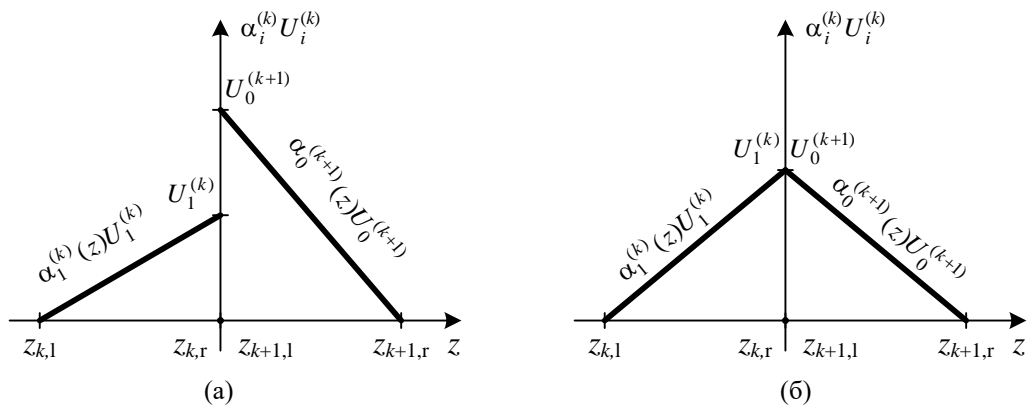
$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1-u}{2}, & i=0 \\ \frac{1+u}{2}, & i=1 \\ u^i - 1, & i=2,4,6,\dots \\ u^i - u, & i=3,5,7,\dots \end{cases}. \quad (2.14)$$

Изглед ових функција базиса приказан је на слици 1 за $0 \leq i \leq 11$. Са те слике може се уочити да су функције базиса конструисане на такав начин да је на левој граници коначног елемента ($u = -1$) само базисна функција α_0 различита од нуле (и једнака јединици), да је на десној граници коначног елемента ($u = 1$) само базисна функција α_1 различита од нуле (и једнака јединици), док су све остале функције базиса, α_i , $i \geq 2$, једнаке нули на границама коначног елемента. У ствари, функције базиса α_0 и α_1 одговарају раније коришћеним део-по-део линеарним функцијама базиса, а функције базиса α_i , $i \geq 2$, су полиноми реда i који су једнаки нули за $u = \pm 1$.



Слика 1.

Изведемо сада услов који морају да задовоље коефицијенти развоја (2.5) како би напон био континуалан дуж вода. За почетак посматрајмо спој два коначна елемента, примера ради елемента k који се налази у опсегу $z_{k,l} \leq z \leq z_{k,r}$ и елемента $k+1$ који се налази у опсегу $z_{k+1,l} \leq z \leq z_{k+1,r}$, при чему је координата споја $z = z_{k,r} = z_{k+1,l}$, као што је приказано на слици 2(а). Једине две функције базиса које имају ненулту вредност на месту тог споја су функција базиса $\alpha_1^{(k)}$ која припада елементу k и налази се са леве стране споја, и функција базиса $\alpha_0^{(k+1)}$ која припада елементу $k+1$ и налази се са десне стране споја. Пошто разматрамо само вредност напона U_{FEM} на споју два коначна елемента, на слици 2(а) приказане су само те две функције базиса након множења одговарајућим коефицијентом развоја (2.5). На основу развоја (2.5), вредност напона U_{FEM} на месту споја са стране елемента k је $\alpha_1^{(k)}(z_{k,r})U_1^{(k)}$, док је вредност напона на месту споја са стране елемента $k+1$ $\alpha_0^{(k+1)}(z_{k+1,l})U_0^{(k+1)}$. Пошто на месту споја важи да је $\alpha_1^{(k)}(z) = \alpha_0^{(k+1)}(z) = 1$, услов континуалности напона на месту споја постаје $U_1^{(k)} = U_0^{(k+1)}$. Након задовољења овог услова производ ових функција базиса и одговарајућих коефицијената развоја приказан је на слици 2(б). Услове попут овог потребно је формирати на свим спојевима коначних елемената, а систем једначина у којима су ти услови аутоматски задовољени назива се повезани систем једначина.



Слика 2.

2.2 Формирање једначина за један коначан елемент

Формирајмо сада систем једначина за један коначан елемент полазећи од једначине (2.13) и користећи функције базиса (2.14). За почетак учимо да се израз са десне стране једнакости (2.13) може поједноставити. Пођимо од

$$\left(\alpha_j^{(k)}(z) \frac{dU_{\text{FEM}}(z)}{dz} \right) \Big|_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} = \alpha_j^{(k)}(z_{k,r}) \frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,r})}{dz} - \alpha_j^{(k)}(z_{k,1}) \frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,1})}{dz}. \quad (2.15)$$

Функције базиса вишег реда које користимо конструисали смо на такав начин да је на левом крају коначног елемента k ($z = z_{k,1}$) само функција базиса $\alpha_0^{(k)}$ различита од нуле (и једнака јединици), док су све остале функције базиса једнаке нули. Слично томе, на десном крају коначног елемента k ($z = z_{k,r}$) само је функција базиса $\alpha_1^{(k)}$ различита од нуле (и једнака јединици), док су све остале функције базиса једнаке нули. Према томе члан са десне стране једнакости (2.13) постаје

$$\left(\alpha_j^{(k)}(z) \frac{dU_{\text{FEM}}(z)}{dz} \right) \Big|_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} = \begin{cases} -\frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,1})}{dz}, & j=0 \\ \frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,r})}{dz}, & j=1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}. \quad (2.16)$$

На основу овога једначина (2.13) за коначни елемент k може се записати у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} F_{00}^{(k)} & F_{01}^{(k)} & F_{02}^{(k)} & \dots & F_{0N_k}^{(k)} \\ F_{10}^{(k)} & F_{11}^{(k)} & F_{12}^{(k)} & \dots & F_{1N_k}^{(k)} \\ F_{20}^{(k)} & F_{21}^{(k)} & F_{22}^{(k)} & \dots & F_{2N_k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N_k 0}^{(k)} & F_{N_k 1}^{(k)} & F_{N_k 2}^{(k)} & \dots & F_{N_k N_k}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^{(k)} \\ U_1^{(k)} \\ U_2^{(k)} \\ \vdots \\ U_{N_k}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,1})}{dz} \\ \frac{dU_{\text{FEM}}(z_{k,r})}{dz} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

при чему се елементи матрице система $[F^{(k)}]$ рачунају као

$$F_{ij}^{(k)} = S_{ij}^{(k)} + R'G'M_{ij}^{(k)}, \quad 0 \leq i, j \leq N_k, \quad (2.18)$$

односно матрично као

$$[F^{(k)}] = [S^{(k)}] + R'G'[M^{(k)}], \quad (2.19)$$

при чему се елементи матрице (месе) $[M^{(k)}]$ рачунају као

$$M_{ij}^{(k)} = \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} \alpha_i^{(k)} \alpha_j^{(k)} dz, \quad 0 \leq i, j \leq N_k, \quad (2.20)$$

док се елементи матрице (крутости) $[S^{(k)}]$ рачунају као

$$S_{ij}^{(k)} = \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,r}} \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}}{dz} dz, \quad 0 \leq i, j \leq N_k. \quad (2.21)$$

Сада када имамо алгоритам и једначине за формирање система једначина за један коначан елемент, у наставку ћемо прво приказати како се формира неповезани систем једначина за све коначне елемента, а након тога како се формира и повезани систем једначина који аутоматски обезбеђује континуалност напона дуж вода.

2.3 Формирање повезаног система једначина

Формирање повезаног система једначина илустроваћемо на примеру који се састоји од $K=3$ коначна елемента, при чему сваки коначни елемент користи функције базиса реда $N_1 = N_2 = N_3 = N = 3$. За сваки од коначних елемената може се формирати матрична једначина попут (2.17), а када се једначине за све коначне елементе групишу у неповезани систем једначина, тај систем може се записати у матричном облику који гласи

$$\begin{bmatrix} F_{00}^{(1)} & F_{01}^{(1)} & F_{02}^{(1)} & F_{03}^{(1)} \\ F_{10}^{(1)} & F_{11}^{(1)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\ F_{20}^{(1)} & F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\ F_{30}^{(1)} & F_{31}^{(1)} & F_{32}^{(1)} & F_{33}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{00}^{(2)} & F_{01}^{(2)} & F_{02}^{(2)} & F_{03}^{(2)} \\ F_{10}^{(2)} & F_{11}^{(2)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\ F_{20}^{(2)} & F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \\ F_{30}^{(2)} & F_{31}^{(2)} & F_{32}^{(2)} & F_{33}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{00}^{(3)} & F_{01}^{(3)} & F_{02}^{(3)} & F_{03}^{(3)} \\ F_{10}^{(3)} & F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} & F_{13}^{(3)} \\ F_{20}^{(3)} & F_{21}^{(3)} & F_{22}^{(3)} & F_{23}^{(3)} \\ F_{30}^{(3)} & F_{31}^{(3)} & F_{32}^{(3)} & F_{33}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_0^{(2)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_0^{(3)} \\ U_1^{(3)} \\ U_2^{(3)} \\ U_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dU_{FEM}(z_{1,l})}{dz} \\ \frac{dU_{FEM}(z_{1,r})}{dz} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dU_{FEM}(z_{2,l})}{dz} \\ \frac{dU_{FEM}(z_{2,r})}{dz} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dU_{FEM}(z_{3,l})}{dz} \\ \frac{dU_{FEM}(z_{3,r})}{dz} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

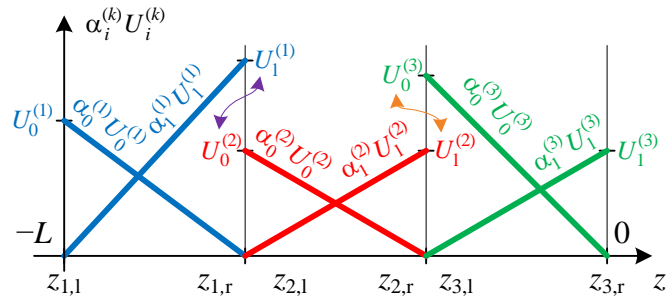
Ради лакше оријентације, у претходној матричној једначини елементи који припадају првом елементу приказани су плавом бојом, елементи који припадају другом елементу приказани су црвеном бојом, а елементи који припадају трећем елементу приказани су зеленом бојом. Претходна матрична једначина може се компактно записати као

$$[F_{dis}][U_{dis}] = [g_{dis}], \quad (2.23)$$

при чему је димензија неповезаног система једначина $N_{dis} = (N+1)K = 12$, па је самим тим и димензија матрице $[F_{dis}]$ 12×12 . Димензије одговарајућих вектора коефицијената $[U_{dis}]$ као и вектора слободних чланова са десне стране једначине (2.22), које ћемо означити са $[g_{dis}]$ су 12×1 .

Полазећи од неповезаног система једначина (2.23), односно (2.22), као први корак ка формирању повезаног система једначина, уочимо да захтев да апроксимативни напон дуж вода буде континуална функција, аутоматски намеће одређене релације које морају постојати између непознатих коефицијената $U_i^{(k)}$, $0 \leq i \leq N_k$, $1 \leq k \leq K$. Систем једначина који аутоматски задовољава те релације назива се повезани систем једначина.

Функције базиса које користимо дефинисане су помоћу полинома који су континуалне функције дуж посматраног коначног елемента, па самим тим и апроксимативни напон мора бити континуалан дуж посматраног коначног елемента. Једино место где може доћи до прекида апроксимативног напона је на споју два коначна елемента. Због тога ћемо посматрати искључиво спојеве коначних елемената, а од свих функција базиса од интереса су нам само оне функције базиса које имају ненулту вредност на крајевима коначних елемената, пошто само оне могу резултовати прекидом апроксимативног напона. Остале функције базиса чија је вредност нула на крајевима коначних елемената не могу резултовати прекидом апроксимативног напона. На основу израза (2.14) присетимо се да једино прве две функције базиса, $\alpha_0^{(k)}$ и $\alpha_1^{(k)}$, $1 \leq k \leq K$, имају ненулту вредност на крајевима посматраног коначног елемента k . Због тога су само ове функције базиса, након множења са одговарајућим коефицијентима из развоја (2.5), приказане на слици 3 за посматрана три коначна елемента из нашег примера, а остале функције базиса које нам нису од интереса, $\alpha_i^{(k)}$, $1 \leq k \leq K$, $i \geq 2$ изостављене су са те слике ради прегледности.



Слика 3.

Да би напон био континуалан на споју првог и другог коначног елемента, са слике 3 очигледно је да мора да важи $U_1^{(1)} = U_0^{(2)}$, што је на тој слици назначено стрелицама љубичасте боје. У систему једначина (2.22) ова два коефицијента означена су масним словима као и колоне матрице $[F]$ које они множе. Пошто та два коефицијента морају бити једнака, број непознатих више није 12, већ постаје 11, а уместо $U_0^{(2)}$ може се писати $U_1^{(1)}$. Тада се коефицијенти $U_1^{(1)}$ и $U_0^{(2)}$ (означени стрелицама љубичасте боје у једначини (2.22)) замењују једним коефицијентом $U_1^{(1)}$, што мора бити праћено сабирањем одговарајућих колона у матрици $[F]$. Колоне које је потребно сабрати означене су такође стрелицама љубичасте боје у формули (2.22). Слично овоме, да би напон био континуалан на споју другог и трећег коначног елемента, мора бити испуњено $U_1^{(2)} = U_0^{(3)}$, односно коефицијент $U_0^{(3)}$ може се заменити коефицијентом $U_1^{(2)}$, након чега следи сабирање колона матрице $[F]$ означених стрелицама окер боје. Након овога добијамо повезани систем једначина чије решење, уз једначине $U_0^{(2)} = U_1^{(1)}$ и $U_0^{(3)} = U_1^{(2)}$ гарантује континуалност напона на споју коначних елемената³. Овај систем једначина гласи

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} F_{00}^{(1)} & F_{01}^{(1)} & F_{02}^{(1)} & F_{03}^{(1)} \\ F_{10}^{(1)} & F_{11}^{(1)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\ F_{20}^{(1)} & F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\ F_{30}^{(1)} & F_{31}^{(1)} & F_{32}^{(1)} & F_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{00}^{(2)} \\ F_{10}^{(2)} \\ F_{20}^{(2)} \\ F_{30}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{01}^{(2)} & F_{02}^{(2)} & F_{03}^{(2)} \\ F_{11}^{(2)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\ F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \\ F_{31}^{(2)} & F_{32}^{(2)} & F_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{00}^{(3)} \\ F_{10}^{(3)} \\ F_{20}^{(3)} \\ F_{30}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_3^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{01}^{(3)} & F_{02}^{(3)} & F_{03}^{(3)} \\ F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} & F_{13}^{(3)} \\ F_{21}^{(3)} & F_{22}^{(3)} & F_{23}^{(3)} \\ F_{31}^{(3)} & F_{32}^{(3)} & F_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_3^{(3)} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{dU_{FEM}(z_{1,l})}{dz} \\ dU_{FEM}(z_{1,r}) \\ dz \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dU_{FEM}(z_{2,r})}{dz} \\ dz \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dU_{FEM}(z_{3,l})}{dz} \\ \frac{dU_{FEM}(z_{3,r})}{dz} \\ dz \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

У претходној процедури, број колона матрице $[F]$ из једначине (2.22) смањен је за 2, тако да су димензије матрице $[F]$ система једначина (2.24) 12×10 . Према томе матрична једначина (2.24) имамо 12 једначина и 10 непознатих коефицијената $U_i^{(k)}$, односно тај систем једначина је предимензиониран, односно имамо две једначине више него што нам је потребно да бисмо једнозначно одредили непознате коефицијенте $U_i^{(k)}$.

За систем једначина са линеарно независним једначинама, што јесте случај у (2.24), вишак једначина може се уклонити на неколико начин. Један начин је да се изоставе две произвољне једначине. То би одговарало процедури према којој се у једначини (2.24) изоставе две произвољне врсте из матрице $[F]$ и исте две врсте из вектора слободних чланова $[g]$. Таква процедура није погодна за проблем који

³ Како су функције базиса глатке функције дуж коначних елемената, тада ће напон бити континуалан дуж читавог вода.

решавамо, јер би нам у том случају у вектору $[g]$ остао одређен број непознатих чланова облика $\frac{dU_{FEM}}{dz}$. Други начин да смањимо број једначина (са 12 на 10 у нашем конкретном случају), је да одређен број једначина из (2.24) заменимо њиховим линеарним комбинацијама. Погодним избором једначина које ће формирати те линеарне комбинације, из вектора слободних чланова $[g]$ може се елиминисати одређен број непознати чланови облика $\frac{dU_{FEM}}{dz}$, као што ће бити приказано у наставку.

Посматрајмо једначину (2.2) и претпоставимо да је подужна отпорност R' континуална функција дуж вода⁴. Пошто, као и напон, и струја дуж вода мора бити континуалан функција, из једначине (2.2) закључујемо да $\frac{dU(z)}{dz}$ мора бити континуална функција дуж вода. Према томе, у посматраном проблему, оправдано је и да се захтева да апроксимативни напон задовољава исти услов, односно да $\frac{dU_{FEM}(z)}{dz}$ буде континуална функција дуж вода. Самим тим на споју првог и другог

коначног елемента тада мора важити $\frac{dU_{FEM}(z_{1,r})}{dz} = \frac{dU_{FEM}(z_{2,l})}{dz}$, што се може записати и као

$$\frac{dU_{FEM}(z_{1,r})}{dz} - \frac{dU_{FEM}(z_{2,l})}{dz} = 0.$$

Замислимо сада да у циљу смањења броја једначина другу и пету једначину из (2.24) заменимо њиховим збиром. То одговара сабирању друге и пете врсте у матрици $[F]$ и вектору слободних чланова из једначине (2.24), као што је приказано стрелицама љубичасте боје. Сви матрични елементи који ће се приликом тога сабирати приказани су масном бојом. Након тог сабирања, а због претходног услова чланови $\frac{dU_{FEM}(z_{1,r})}{dz}$ и $-\frac{dU_{FEM}(z_{2,l})}{dz}$ у вектору $[g]$ се анулирају. Слично

овоме, на споју другог и трећег елемента важи $\frac{dU_{FEM}(z_{2,r})}{dz} - \frac{dU_{FEM}(z_{3,l})}{dz} = 0$, а како бисмо додатно смањили број једначина сабраћемо шесту и девету једначину из (2.24), као што је означено стрелицама окер боје. Тада ће се, на основу претходног услова, чланови $\frac{dU_{FEM}(z_{2,r})}{dz}$ и $-\frac{dU_{FEM}(z_{3,l})}{dz}$ скратити у

новодобијеном вектору $[g]$. Финално, пошто је струја на отвореном крају вода ($z = 0$) једнака нули, на основу једначине (2.2) закључујемо да мора важити $\frac{dU(z=0)}{dz} = 0$. Пошто исто морамо захтевати и за

апроксимативни напон U_{FEM} , закључујемо да мора да важи $\frac{dU_{FEM}(z_{3,r})}{dz}$, пошто је $z_{3,r} = 0$ (видети

слику 3). Према томе члан $\frac{dU_{FEM}(z_{3,r})}{dz}$ мора бити једнак нули⁵ у једначини (2.24), а ради боље оријентације у тој једначини овај члан означен је правоугаоником тамно-црвене боје. Након свега овога, систем једначина (2.24) постаје

⁴ Ако се подужна отпорност скоковито мења на споју два коначна елемента, приказана процедура се не може директно применити на решавање таквог проблема. У ту сврху може се искористити нумерички метод познат под називом *Discontinuous Galerkin method*.

⁵ Приметимо да смо исто ово добили аутоматски када смо овај проблем решавали варијационим методом, иако тада приликом формирања матричне једначине нисмо експлицитно разматрали гранични услов на отвореном крају вода.

$$\begin{bmatrix}
F_{00}^{(1)} & F_{01}^{(1)} & F_{02}^{(1)} & F_{03}^{(1)} \\
F_{10}^{(1)} & F_{11}^{(1)} + F_{00}^{(2)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\
F_{20}^{(1)} & F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\
F_{30}^{(1)} & F_{31}^{(1)} & F_{32}^{(1)} & F_{33}^{(1)} \\
F_{10}^{(2)} \\
F_{20}^{(2)} \\
F_{30}^{(2)} \\
F_{11}^{(2)} + F_{00}^{(3)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\
F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \\
F_{31}^{(2)} & F_{32}^{(2)} & F_{33}^{(2)} \\
F_{10}^{(3)} \\
F_{20}^{(3)} \\
F_{30}^{(3)} \\
F_{01}^{(3)} & F_{02}^{(3)} & F_{03}^{(3)} \\
F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} & F_{13}^{(3)} \\
F_{21}^{(3)} & F_{22}^{(3)} & F_{23}^{(3)} \\
F_{31}^{(3)} & F_{32}^{(3)} & F_{33}^{(3)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_0^{(1)} \\
U_1^{(1)} \\
U_2^{(1)} \\
U_3^{(1)} \\
U_1^{(2)} \\
U_2^{(2)} \\
U_3^{(2)} \\
U_1^{(3)} \\
U_2^{(3)} \\
U_3^{(3)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{dU_{FEM}(z_{1,1})}{dz} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (2.25)$$

Подсетимо се сада да је напон на почетку вода одређен граничним условом (2.3). На основу слике 3 видимо да је напон на почетку вода једнак коефицијенту $U_0^{(1)}$, према томе тај коефицијент није непознат у систему једначина (2.25), већ је познат и износи $U_0^{(1)} = E_0$. Због тога се тај коефицијент након множења са елементима прве колоне матрице $[F]$ из једначине (2.25) мора пребацити са десне стране једнакости, након чега једначина (2.25) постаје

$$\begin{bmatrix}
F_{01}^{(1)} & F_{02}^{(1)} & F_{03}^{(1)} \\
F_{11}^{(1)} + F_{00}^{(2)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\
F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\
F_{31}^{(1)} & F_{32}^{(1)} & F_{33}^{(1)} \\
F_{10}^{(2)} \\
F_{20}^{(2)} \\
F_{30}^{(2)} \\
F_{11}^{(2)} + F_{00}^{(3)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\
F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \\
F_{31}^{(2)} & F_{32}^{(2)} & F_{33}^{(2)} \\
F_{10}^{(3)} \\
F_{20}^{(3)} \\
F_{30}^{(3)} \\
F_{01}^{(3)} & F_{02}^{(3)} & F_{03}^{(3)} \\
F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} & F_{13}^{(3)} \\
F_{21}^{(3)} & F_{22}^{(3)} & F_{23}^{(3)} \\
F_{31}^{(3)} & F_{32}^{(3)} & F_{33}^{(3)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1^{(1)} \\
U_2^{(1)} \\
U_3^{(1)} \\
U_1^{(2)} \\
U_2^{(2)} \\
U_3^{(2)} \\
U_1^{(3)} \\
U_2^{(3)} \\
U_3^{(3)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{dU_{FEM}(z_{1,1})}{dz} - F_{00}^{(1)} E_0 \\
-F_{10}^{(1)} E_0 \\
-F_{20}^{(1)} E_0 \\
-F_{30}^{(1)} E_0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (2.26)$$

Претходна манипулација смањила је број колона матрице $[F]$ за један, па матрица $[F]$ у једначини (2.26) има димензију 10×9 . Према томе систем једначина (2.26) има 10 једначина и 9 непознатих. Пошто имамо више једначина него непознатих, у том систему једначина једну једначину можемо да изоставимо. То одговара уклањању једне врсте из матрице $[F]$ и уклањању исте врсте из вектора слободних чланова $[g]$. Пошто је у првом члану вектора $[g]$ из (2.26) сабирак $-\frac{dU_{FEM}(z_{1,1})}{dz}$, како бисмо уклонили тај сабирак, бирамо да из система једначина (2.26) уклонимо прву једначину. Након овога добијамо финални повезани систем једначина који гласи

$$\begin{bmatrix}
F_{11}^{(1)} + F_{00}^{(2)} & F_{12}^{(1)} & F_{13}^{(1)} \\
F_{21}^{(1)} & F_{22}^{(1)} & F_{23}^{(1)} \\
F_{31}^{(1)} & F_{32}^{(1)} & F_{33}^{(1)} \\
F_{10}^{(2)} \\
F_{20}^{(2)} \\
F_{30}^{(2)} \\
F_{11}^{(2)} + F_{00}^{(3)} & F_{12}^{(2)} & F_{13}^{(2)} \\
F_{21}^{(2)} & F_{22}^{(2)} & F_{23}^{(2)} \\
F_{31}^{(2)} & F_{32}^{(2)} & F_{33}^{(2)} \\
F_{10}^{(3)} \\
F_{20}^{(3)} \\
F_{30}^{(3)} \\
F_{01}^{(3)} & F_{02}^{(3)} & F_{03}^{(3)} \\
F_{11}^{(3)} & F_{12}^{(3)} & F_{13}^{(3)} \\
F_{21}^{(3)} & F_{22}^{(3)} & F_{23}^{(3)} \\
F_{31}^{(3)} & F_{32}^{(3)} & F_{33}^{(3)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1^{(1)} \\
U_2^{(1)} \\
U_3^{(1)} \\
U_1^{(2)} \\
U_2^{(2)} \\
U_3^{(2)} \\
U_1^{(3)} \\
U_2^{(3)} \\
U_3^{(3)}
\end{bmatrix}
=
-E_0
\begin{bmatrix}
F_{10}^{(1)} \\
F_{20}^{(1)} \\
F_{30}^{(1)} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (2.27)$$

Овај систем једначина може се компактно записати и као

$$[F_{con}][U_{con}] = [g_{con}]. \quad (2.28)$$

Апроксимативни напон који се добија помоћу коефицијената развоја који су решење овог система једначина, уз једначине $U_0^{(2)} = U_1^{(1)}$, $U_0^{(3)} = U_1^{(2)}$ и $U_0^{(1)} = E_0$ аутоматски обезбеђује континуалност апроксимативног напона дуж вода и задовољење граничних услова на крајевима вода. У наставку ћемо приказати ефикасан алгоритам за попуњавање коефицијената повезаног система једначина (2.27).

2.4 Алгоритам за попуњавање коефицијената повезаног система једначина

У ранијем поглављу, када смо проблем расподеле напона дуж вода решавали по први пут, сусрели смо се са основним алгоритмом формирања повезаног система једначина. Подсетимо се да смо тада прво алоцирали меморијски простор за матрицу неповезаног система једначина, $[F^{\text{dis}}]$, након чега смо елементе те матрице попунили рачунајући одговарајуће интеграле који се појављују у матрици масе и матрици крутости за сваки коначни елемент и сваку комбинацију базисних и тест функција. Након тога алоцирали смо меморијски простор за матрицу повезаности, $[C]$, чије елементе смо затим попунили на основу тополошке анализе проблема. На крају смо алоцирали меморијски простор за матрицу повезаног система једначина, $[F^{\text{con}}]$, а ту матрицу израчунали смо као $[F^{\text{con}}] = [C]^T [F^{\text{dis}}] [C]$.

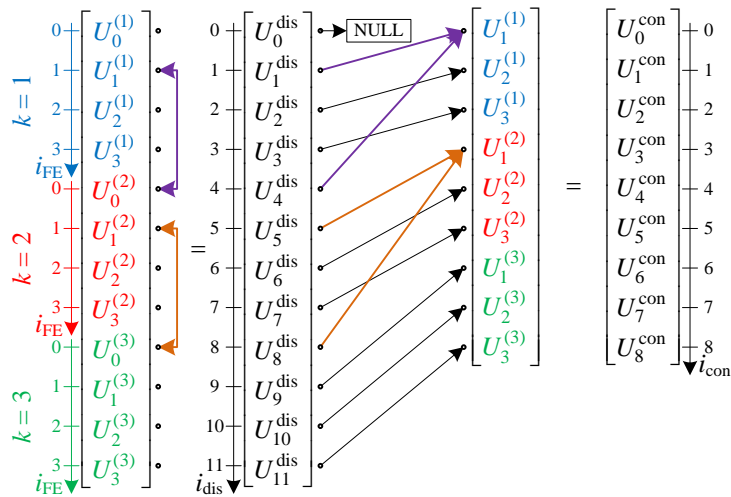
Због своје једноставности овај алгоритам погодан је у едукативне сврхе, поготову за слушаоце који се по први пут сусрећу са концептом неповезаног и повезаног система једначина. У том алгоритму постоји јасна визуелна веза између ненултих коефицијената у матрици повезаности и топологије меша, поготову у случају једнодимензионих проблема, као што је проблем анализе расподеле напона дуж вода. Са друге стране, са становишта ефикасности, овај алгоритам поседује низ недостатака, као што ће бити објашњено у наставку.

На првом месту заузеће меморијског простора је значајно веће од онога што је неопходно. Подсетимо се да је нама за прорачун непознатих коефицијената напона потребна матрица $[F^{\text{con}}]$, димензије $N_{\text{con}} \times N_{\text{con}}$, а за њен прорачун према овом алгоритму ми алоцирамо меморијски простор и за матрицу $[F^{\text{dis}}]$, димензије $N_{\text{dis}} \times N_{\text{dis}}$, и за матрицу $[C]$, димензије $N_{\text{dis}} \times N_{\text{con}}$ ($N_{\text{dis}} \geq N_{\text{con}}$). У великом броју случајева када се методом коначних елемената решавају сложени инжењерски проблеми, количина расположиве рачунарске меморије може представљати ограничавајући фактор, а приказаним алгоритмом формирања повезаног система једначина ми бисмо заузимали барем три пута више меморије него што је то потребно.

Други значајан недостатак је сам начин прорачуна елемената матрице $[F^{\text{con}}]$. Према приказаном алгоритму прво је потребно транспоновати матрицу $[C]$, што захтева одређен број читавања вредности из меморије, а затим њихово уписивање у друге меморијске просторе. Након тога потребно је спровести два матрична множења, што је са становишта заузећа рачунарских ресурса врло „скупа“ процедура. Због свега овога у наставку ћемо приказати значајно ефикаснији алгоритам за формирање повезаног система једначина. Основне идеје тог алгоритма су релативно једноставне: 1. Заузимање искључиво неопходног меморијског простора и 2. Директно уписивање прорачунатих вредности матрице масе и крутости за поједине коначне елементе у матрицу $[F^{\text{con}}]$, како би се избегло транспоноване матрица и њихово множење у раније приказаном алгоритму.

У циљу једноставнијег приказа новог алгоритма формирања повезаног система једначина, останимо на примеру који смо анализирали до сад (проблем се састоји од $K = 3$ коначних елемената, а напон је дуж сваког коначног елемента описан функцијама базиса реда $N_1 = N_2 = N_3 = N = 3$). У циљу једноставније визуализације веза између непознатих коефицијената неповезаног и повезаног система, посматрајмо слику 4. На тој слици приказана су четири вектора непознатих коефицијената. Први вектор одговара коефицијентима напона у неповезаном систему када је индексирање двоиндексно (преко броја коначног елемента, k , $1 \leq k \leq K$, и реда функције базиса у оквиру једног коначног елемента, i_{FE} , $0 \leq i_{\text{FE}} \leq N_k$). Други вектор одговара коефицијентима напона у неповезаном систему када је индексирање једноиндексно (преко индекса коефицијента у неповезаном систему, i_{dis} , $0 \leq i_{\text{dis}} \leq N_{\text{dis}} - 1$). У претходним изразима N_{dis} је димензија неповезаног система, и у нашем конкретном примеру износи $N_{\text{dis}} = (N + 1)K = 12$. Једноставности ради узећемо да је пресликавање између елемената ова два вектора бијективно (елементи на истим позицијама имају исте вредности, на пример $U_5^{\text{dis}} = U_1^{(2)}$), што је

приказано знаком једнакости између ова два вектора. Трећи вектор представља коефицијенте напона у повезаном систему када је индексирање двоиндексно (преко броја коначног елемента и реда функције базиса у оквиру једног коначног елемента). Четврти вектор представља коефицијенте напона у повезаном систему када је индексирање једноиндексно (преко индекса коефицијента у повезаном систему, $i_{\text{con}}, 0 \leq i_{\text{con}} \leq N_{\text{con}} - 1$). У претходним изразима N_{con} је димензија повезаног система, а у нашем конкретном примеру износи $N_{\text{con}} = 9$. Једноставности ради узећемо да је пресликавање између елемената трећег и четвртог вектора бијективно, што је означено знаком једнакости између ова два вектора.



Слика 4.

Пресликавање између елемената вектора неповезаног и повезаног система приказано је косим стрелицама између другог и трећег вектора. Подсетимо се да је у нашем примеру први коефицијент напона у неповезаном систему одређен, односно да важи $U_0^{(1)} = U_0^{\text{dis}} = E_0$, па због тога тај коефицијент није непозната и нема одговарајући непознати коефицијент у повезаном систему једначина (због тога показује на NULL на слици 4). Даље, сетимо се да су (због континуалности напона) коефицијент $U_1^{(1)} = U_1^{\text{dis}}$ и коефицијент $U_0^{(2)} = U_4^{\text{dis}}$ у неповезаном систему једнаки, па према томе њима у повезаном систему одговара један коефицијент $U_1^{(1)} = U_0^{\text{con}}$, као што је приказано стрелицама љубичасте боје на слици 4. Слично овоме и коефицијенту $U_1^{(2)} = U_5^{\text{dis}}$ и коефицијенту $U_0^{(3)} = U_8^{\text{dis}}$ из неповезаног система одговара један коефицијент $U_1^{(2)} = U_3^{\text{con}}$ у повезаном систему. На основу свега овога између елемената вектора $[U^{\text{dis}}]$ и $[U^{\text{con}}]$ постоји сурјекција (пресликавање „на“).

Уведимо сада вектор C , димензије $1 \times N_{\text{dis}}$, који описује претходно пресликавање између индекса у неповезаном систему, i_{dis} , и индекса у повезаном систему, i_{con} . У нашем конкретном примеру тај вектор може се увести као

$$[C] = \begin{bmatrix} \text{NULL} & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Димензија овог вектора је $1 \times N_{\text{dis}}$, а његов индекс креће се у опсегу $0 \leq i_{\text{dis}} \leq N_{\text{dis}} - 1$. На позицији i_{dis} овог вектора налази се индекс коефицијента i_{con} одговарајућег коефицијента напона у повезаном систему. На пример, за $i_{\text{dis}} = 0$ добијамо $i_{\text{con}} = \text{NULL}$, за $i_{\text{dis}} = 1$ добијамо $i_{\text{con}} = 0$, за $i_{\text{dis}} = 2$ добијамо $i_{\text{con}} = 1$, за $i_{\text{dis}} = 4$ добијамо $i_{\text{con}} = 0$ и тако даље. Према томе када се тополошком анализом попуне коефицијенти вектора $[C]$, између индекса у неповезаном и повезаном систему постоје једноставне релације

$$i_{\text{con}} = C_{i_{\text{dis}}} \text{ и} \quad (2.30)$$

$$j_{\text{con}} = C_{j_{\text{dis}}} . \quad (2.31)$$

У претходним једначинама индексима i означавали смо колоне у матрицама (које одговарају редном броју функције базиса), а индексима j врсте у матрицама (које одговарају редном броју тест функције), а ту нотацију задржаћемо и овде.

Према томе алгоритам попуњавања матрице $[F^{\text{con}}]$ је следећи:

- За један коначан елемент прорачунамо матрице масе, $[M^{(k)}]$, и матрице крутости $[S^{(k)}]$.
- На основу тополошке анализе попунимо елементе вектора повезаности, $[C]$.
- За све коначне елементе ($1 \leq k \leq K$) и све њихове индексе ($0 \leq i_{\text{FE}} \leq N_k, 0 \leq j_{\text{FE}} \leq N_k$) прорачунамо одговарајуће индексе у неповезаном систему (i_{dis} и j_{dis}).
- На основу вектора повезаности одређујемо позиције на којима је потребно уписати елементе из (локалних) матрица једног коначног елемента, $[M^{(k)}]$ и $[S^{(k)}]$, у финалну матрицу система, $[F^{\text{con}}]$, према једначинама (2.30) и (2.31).
- Постојећој вредности елемента у матрици $[F^{\text{con}}]$ **додајемо** нову вредност, као $F_{j_{\text{con}}, i_{\text{con}}}^{\text{con}} += S_{j_{\text{FE}}, i_{\text{FE}}}^{(k)} + R'G' \cdot M_{j_{\text{FE}}, i_{\text{FE}}}^{(k)}$.

Овај алгоритам приказан је на слици 5. Обратите пажњу да се оваквим алгоритмом тражене вредности директно уписују у жељене позиције у матрици $[F^{\text{con}}]$, што је значајно ефикасније од преписивања и препакивања вредности између две матрице.

```

for (k = 1; k <= K; k++){
  for (jFE = 0; jFE <= Nk; jFE++) {
    jdis = jFE + (Nk + 1)*(k - 1);
    jcon = C[jdis];
    for (iFE = 0; iFE <= Nk; iFE++) {
      idis = iFE + (Nk + 1)*(k - 1);
      icon = C[idis];
      if (jcon!=NULL && icon!=NULL){
        Fcon[jcon, icon] += S[jFE, iFE] + Rprim*Gprim* M[jFE, iFE];
      }
    }
  }
}

```

Слика 5.

2.5 Прорачун елемената матрице масе и крутости за један коначан елемент

Као финалан корак остало је да прикажемо алгоритам прорачуна елемената матрице масе и крутости за један коначан елемент, односно интеграле (2.20) и (2.21). Функције базиса дефинисане су у (2.14) у локалном координатном систему $-1 \leq u \leq 1$, па је и интеграцију погодније спровести у истом локалном координатном систему за све коначне елементе.

Веза између глобалне координате z и локалне координате u за посматрани коначни елемент је

$$u = \frac{2}{L_k}(z - z_{k,1}) - 1, \text{ односно} \quad (2.32)$$

$$z = \frac{L_k}{2}(u + 1) + z_{k,1}, \quad (2.33)$$

а веза између прираштаја локалне и глобалне координате је

$$du = \frac{2}{L_k} dz. \quad (2.34)$$

Сменом (2.33) у (2.20) добијамо

$$M_{ij}^{(k)} = \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,f}} \alpha_i^{(k)}(z) \alpha_j^{(k)}(z) dz = \int_{u=-1}^1 \alpha_i^{(k)}(u) \alpha_j^{(k)}(u) \frac{dz}{du} du = \frac{L_k}{2} \int_{u=-1}^1 \alpha_i^{(k)}(u) \alpha_j^{(k)}(u) du, \quad (2.35)$$

$$0 \leq i, j \leq N_k.$$

У претходном изразу искоришћено је да је $\frac{dz}{du} = \frac{L_k}{2}$. Слично овоме елементи матрице крутости рачунају се као

$$S_{ij}^{(k)} = \int_{z=z_{k,1}}^{z_{k,f}} \frac{d\alpha_i^{(k)}(z)}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}(z)}{dz} dz = \int_{u=-1}^1 \frac{d\alpha_i^{(k)}(u)}{du} \frac{du}{dz} \frac{d\alpha_j^{(k)}(u)}{du} \frac{du}{dz} \frac{dz}{du} du = \frac{2}{L_k} \int_{u=-1}^1 \frac{d\alpha_i^{(k)}(u)}{du} \frac{d\alpha_j^{(k)}(u)}{du} du, \quad (2.36)$$

$$0 \leq i, j \leq N_k.$$

Полазећи од (2.14) изводи функција базиса по локалној координати u који се појављују у изразу (2.36) су

$$\frac{d\alpha_i(u)}{du} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & i = 0 \\ \frac{1}{2}, & i = 1 \\ iu^{i-1}, & i = 2, 4, 6, \dots \\ iu^{i-1} - 1, & i = 3, 5, 7, \dots \end{cases}. \quad (2.37)$$

Пошто су подинтегралне функције у изразима (2.35) и (2.36) полиноми, интеграција се најчешће спроводи Гаусовим квадратурним формулама.

3 Нумерички примери

На сликама 6-13 приказани су резултати нумеричке анализе вода дужине $L = 30 \text{ m}$, подужне отпорности $R' = 9,308 \Omega/\text{m}$ и подужне проводности $G' = 3,469 \text{ mS}/\text{m}$ методом коначних елемената са функцијама базиса вишег реда. На свакој слици коришћен је фиксан ред функција базиса (N), при чему је мењан број коначних елемената којима се моделује вод (K). На левој половини слика приказана је расподела напона дуж вода, заједно са аналитичким решењем, а на десној половини слика приказан је корен из средње квадратне грешке у функцији броја непознатих (N_{con}), заједно са кореном из средње квадратне грешке када се користе део по део линеарне функције базиса, што одговара $N = 1$ у контексту функција базиса вишег реда. Грешка се прорачунава за 1000 (дискретних) тачака униформно распоређених дуж вода. Корен из средње квадратне грешке могао би и да се прорачуна интеграцијом квадрата разлике између тачног и нумеричког решења, што се оставља за вежбу заинтересованом читаоцу.

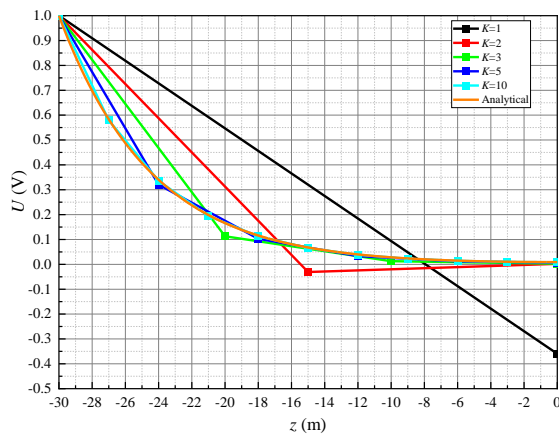
Интеграција производа функција базиса и тест функција приликом прорачуна елемената матрице масе, односно интеграција њихових извода у оквиру прорачуна матрице крутости, своди се на интеграцију полинома. Иако се ти интегрални у овом примеру могу решити аналитички, такав поступак поприлично је приметан, посебно за функције базиса високог реда, а рогобатни изрази који се тада могу добити могу бити врло захтевни за тачан нумерички прорачун. Са друге стране полиноми се могу врло ефикасно интегралити применом Гаус-Лежандрових интеграционих формула. Подсетимо се да је Гаус-Лежандрова интеграција у N_{GL} тачака довољна за тачан прорачун интеграла полиномске функције реда $2N_{\text{GL}} - 1$. На основу овога одредимо потребан број тачака Гаус-Лежандрове интеграционе формуле како би се прорачунао интеграл (2.35) у оквиру прорачуна матрице масе ако се користе функције базиса реда N . Пошто у интегралу (2.35) имамо производ два полинома реда N , подинтегрална функције је полином реда $2N$, а на основу релације

$$2N = 2N_{\text{GL}} - 1 \quad (2.38)$$

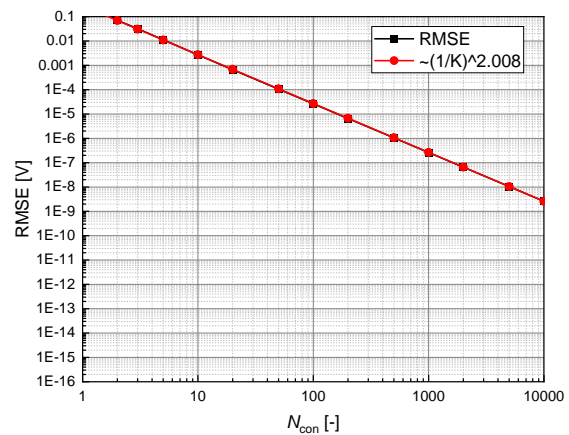
добијамо да је $N_{GL} = N + 1/2$, односно да би за број тачака Гаус-Лежандрове интеграционе формуле у интегралу (2.35) требало узети први следећи цео број, што износи

$$N_{GL} = N + 1. \quad (2.39)$$

Формула (2.39) не узима у обзир нумеричке грешке услед представљања бројева у коначној тачности, па се због тога на N_{GL} обично узима нешто већи број тачака него што то предвиђа формула (2.39). Због тога ћемо у свим примерима у наставку користити $N_{GL} = N + 5$. Строго говорећи, због тога што оператор извода који делује на функције базиса у интегралу (2.36) ефективно снижава ред полинома за један, са N на $N - 1$, што је у складу са (2.37), за прорачун матрице крутости могло би се користити мање тачака нумеричке интеграције него за прорачун матрице масе. Како бисмо процедуру учинили што једноставнијом, изабрали смо да обе ове матрице интегралимо Гаус-Лежандровим формулама у истом броју тачака, $N_{GL} = N + 5$.

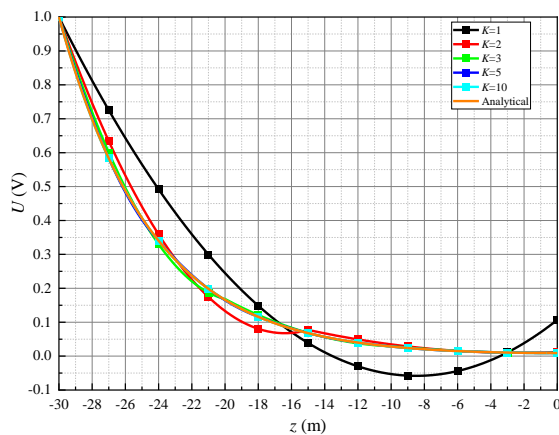


(a)

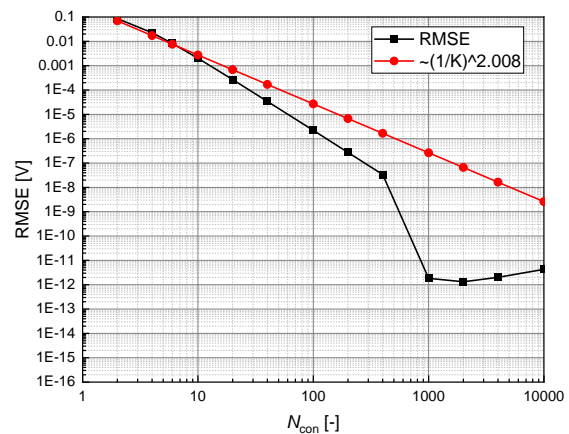


(б)

Слика 6. $N = 1$.

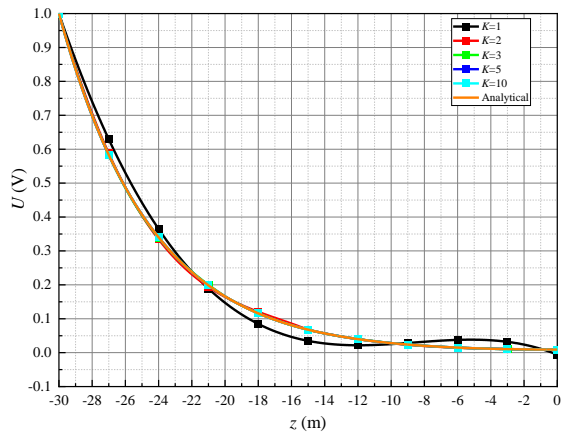


(a)

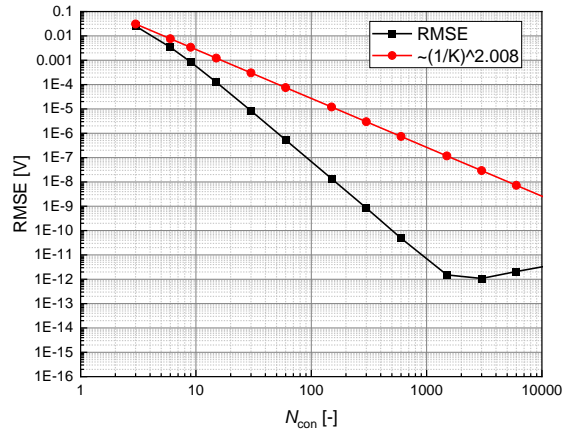


(б)

Слика 7. $N = 2$.

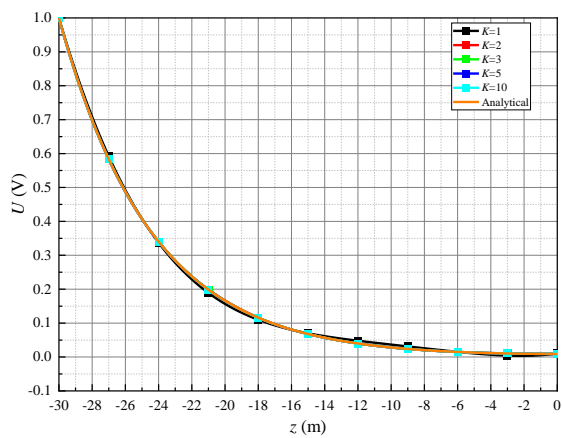


(a)

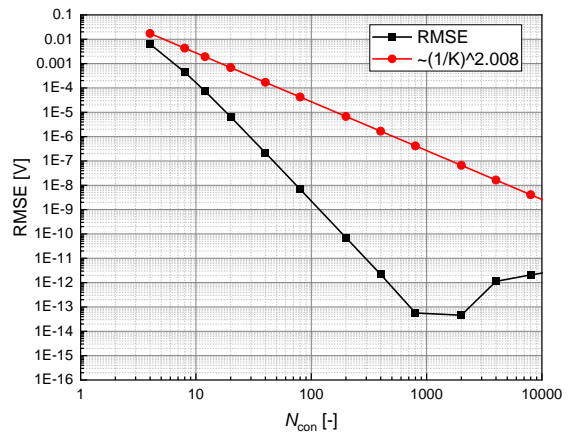


(б)

Слика 8. $N = 3$.

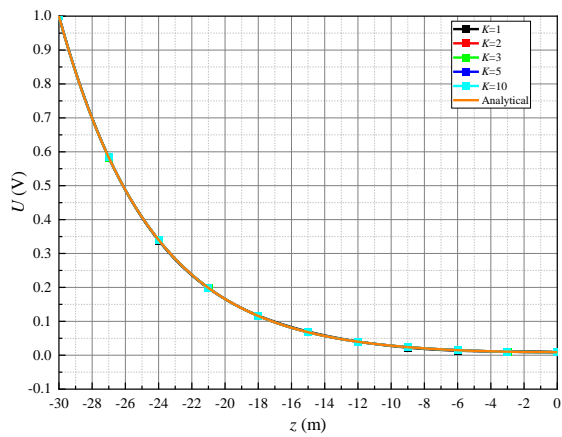


(a)

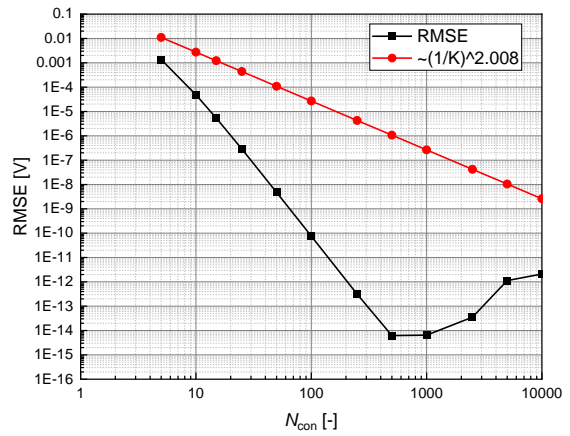


(б)

Слика 9. $N = 4$.

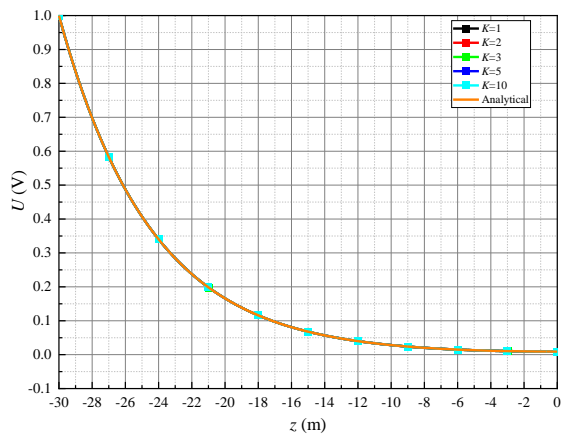


(a)

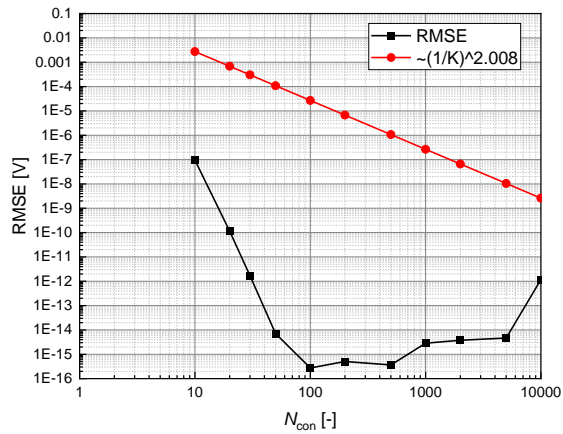


(б)

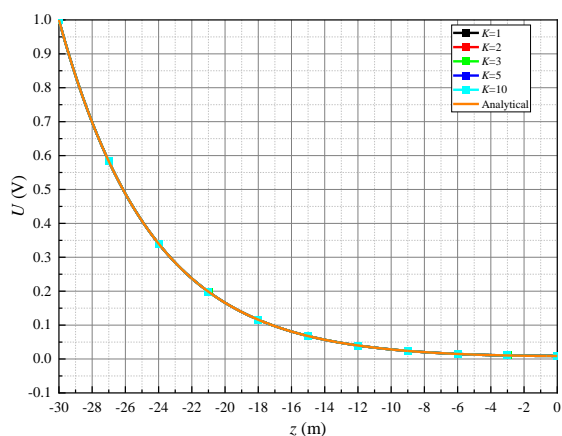
Слика 10. $N = 5$.



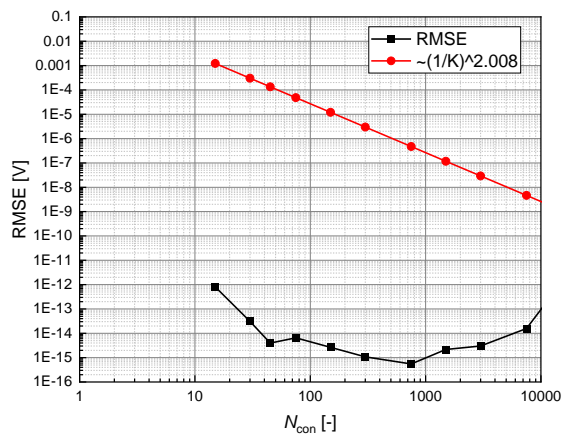
(a)



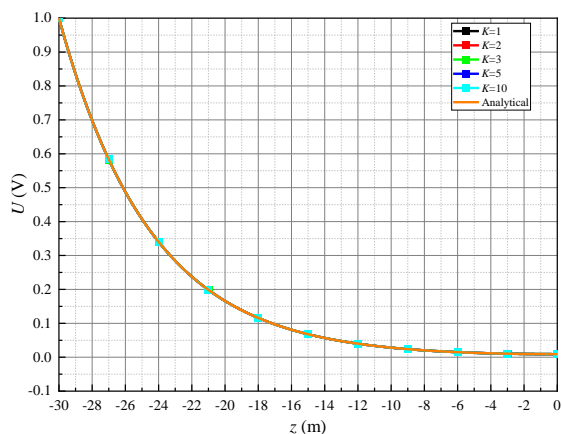
(б)

Слика 11. $N = 10$.

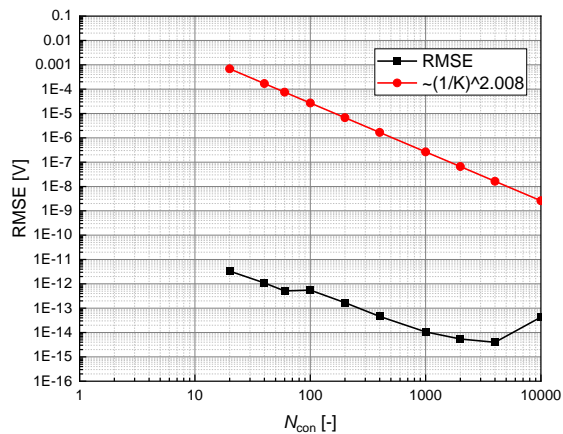
(a)



(б)

Слика 12. $N = 15$.

(a)



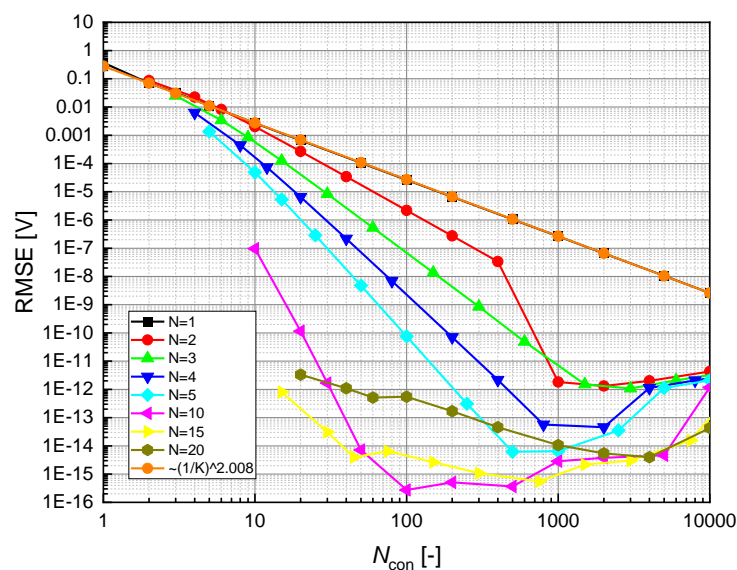
(б)

Слика 13. $N = 20$.

На основу приказаних резултата види се да тачност нумеричког решења врло брзо расте са порастом N (p -refinement procedure), значајно брже него са повећањем броја коначних елемената (h -refinement procedure). Примера ради, за $N=5$ већ за $K=1$ добијају се поприлично тачни резултати. Са друге стране, са повећањем N функције базиса постају сложеније, финална матрица постаје

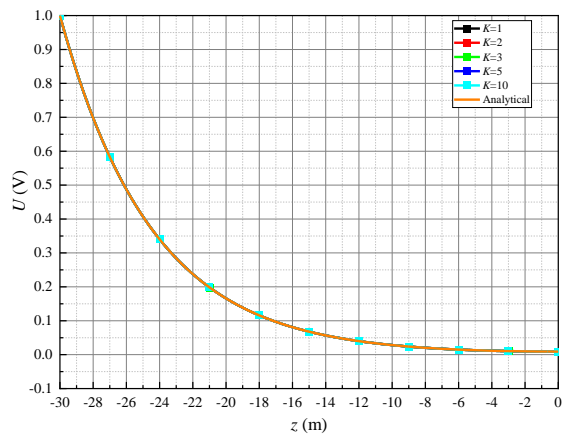
попуњенија, а ако би се користили изузетно високи редови функција базиса могло би доћи до различитих нумеричких нестабилности.

Одређивање оптималног реда N представља посебну тему. На слици 14 приказан је корен из средње квадратне грешке за $1 \leq N \leq 20$. Са те слике видимо да се, за фиксан број непознатих, генерално гледано најтачније решење добија за $N=15$, па у овом примеру може се узети да је $N=15$ оптимално са становишта најтачнијег решења за минималан број непознатих. Поређења ради, за $N=15$ средња квадратна грешка од око $\delta = 10^{-12}$ V остварује се већ за $N_{\text{dis}} = 15$ непознатих, док је за корен из средње квадратне грешке од око $\delta = 10^{-9}$ V када се користе функције базиса ниског реда ($N=1$, део по део линеарна апроксимација из ранијег поглавља) потребно око $N_{\text{dis}} = 10000$ непознатих. Према томе функцијама базиса вишег реда са око три реда мање непознатих остварује се три реда тачније решење, што показује огромну предност функција базиса вишег реда у односу на функције базиса нижег реда. Цена која се при томе плаћа је компликованија аналитичка припрема и сложенији рачунарски програм када се користе функције базиса вишег реда.

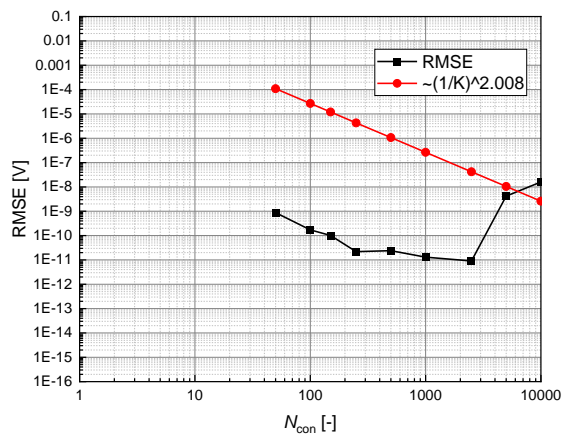


Слика 14. Корен из средње квадратне грешке у функцији броја непознатих за различите степене полиномске апроксимације напона (N).

Као илустрација робусности приказаних функција базиса, на слици 15 приказана су нумеричка решења и корен из средње квадратне грешке за $N=50$. Овако висок ред функција базиса неоправдан је за овај пример, већ се користи искључиво као илустрација ситуација које могу настати приликом коришћења функција базиса изузетно високог реда. На првом месту може доћи до нагомилавања нумеричке грешке, било приликом прорачуна функција базиса било приликом њихове интеграције. На другом месту, функције базиса (2.14) лоше су условљене, што за високе редове оваквих функција базиса може резултовати великим кондиционим бројем матрице система. Постоје технике за решавање овог проблема, односно смањење кондиционог броја матрице система о којима ће, ако време дозволи, бити говора у наредним поглављима. Због свега овога са слике 15 видимо да за $N=50$ добијамо мање тачно решење него за $N=15$, па очекујемо да је оптималан ред функција базиса негде између $N=15$ и $N=20$. То што и за $N=50$ добијамо тачна (и смислена) решења само говори у корист робусности приказаних алгоритама.



(a)



(б)

Слика 15. $N = 50$.