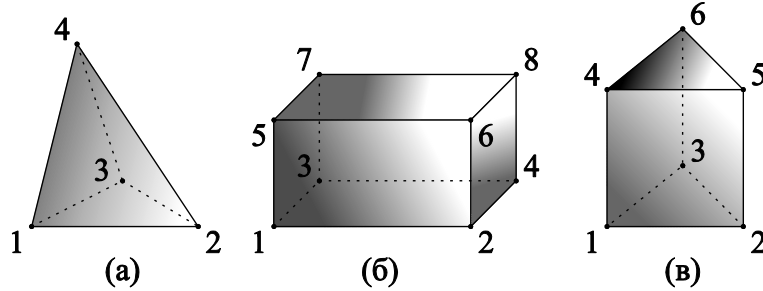


1 Геометријска дискретизација

Геометријска дискретизација је први корак приликом анализе било ког проблема методом коначних елемената. Начин на који ће проблем бити геометријски подељен на коначне елементе утиче на потребне рачунарске ресурсе, укупно време извршавања симулације, као и на стабилност и тачност нумеричког решења.

Најчешће коришћени елементи за тродимензионо (3-D) геометријско моделовање у оквиру метода коначних елемената су тетраедар, квадар и тространа призма који су приказани на слици 1.1.



Слика 1.1. (а) Тетраедар, (б) квадар и (в) тространа призма.

Генерално, избор коначних елемената представља компромис између геометријске флексибилности елемената, са једне стране, и једноставности имплементације нумеричког метода, са друге стране. Такође, за одређен број геометријски једноставнијих коначних елемената, као што су тетраедар и квадар, већ постоје готова софтверска решења за аутоматску просторну сегментацију произвољних геометрија. У случају геометријски сложенијих коначних елемената, када комерцијално доступна решења за просторну сегментацију не постоје, потребно је развити софтвер од почетка или генерисати геометријске моделе „ручно“, када је потребно дубље разумевање математичких модела који представљају њихову теоријску основу.

Када се моделују структуре са израженим закривљењима, тетраедар, квадар и тространа призма обично не представљају најбољи избор. Због својих правих ивица и равних страница, у околини области са израженим закривљењима потребан је велики број коначних елемената. Елементи могу бити значајно мањих димензија него што то диктирају ограничења нумеричког метода – у случају апроксимације поља полиномима ниског реда, да би се добили задовољавајуће тачни резултати, линеарне димензије коначних елемената су реда величине $\lambda/10$, где λ представља таласну дужину у посматраном коначном елементу. Са повећањем броја коначних елемената (врло брзо) расте и потреба за рачунарским ресурсима, а укупно време извршавања симулације се продужава.

У поређењу са малодоменским начином моделовања великим бројем електрично малих коначних елемената, моделовање великодоменским коначним елементима са полиномском апроксимацијом поља вишег реда показало се као врло ефикасно. На овај начин могуће је значајно смањити ред финалног система линеарних једначина, а самим тим и потребе за рачунарским ресурсима и укупно време извршавања симулације, уз задржавање исте (или постизање боље) тачности апроксимације поља. Могуће је повећати тачност и ефикасност метода коначних елемената у (готово) свим ситуацијама. Уместо великог броја електрично малих коначних елемената са ниским редовима полиномске апроксимације поља, могуће је користити мањи број електрично великих коначних елемената са високим редовима полиномске апроксимације поља и максималним линеарним димензијама и до 2λ . У посебним ситуацијама, када се анализира део простора са пуно ситних детаља и/или врло брзом променом ЕМ поља (на пример, део простора са ивичним ефектом), електрично велики коначни елементи се могу произвољно поделити на већи број мањих коначних елемената. На овај начин уситњавањем коначних елемената само у критичном делу проблема, критични део се моделује у малодоменском духу, док је остатак могуће моделовати на великодоменски начин задржавајући све предности које такав начин моделовања нуди.

Да би се у потпуности искористили сви потенцијали великодоменских коначних елемената, коначни елементи морају бити геометријски флексибилни како не би дошло до њиховог уситњавања диктираног геометријом и закривљењима. Као један од атрактивних избора флексибилних елемената, са (по потреби) закривљеним страницама, је уопштени интерполациони закривљени параметарски хексаедар вишег (теоријски произвољног) геометријског реда. Овај елемент је први пут представљен 1988. године, а данас се често користи за моделовање 3-D неізотропних и континуално нехомогених електромагнетских структура произвољних геометрија.

У наредним одељцима дат је кратак опис интерполационих закривљених параметарских хексаедара произвољног геометријског реда. Описане су основне геометријске и математичке релације неопходне за имплементацију хексаедарских елемената у методу коначних елемената вишег реда.

1.1 Интерполациони закривљени параметарски хексаедар вишег геометријског реда

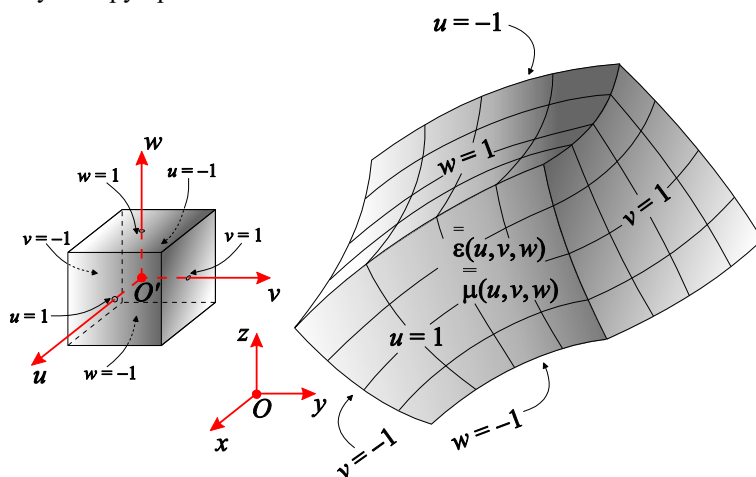
Уопштени хексаедар одређен је помоћу $Q^e = (1 + K_u^e)(1 + K_v^e)(1 + K_w^e)$ интерполационих тачака произвољно распоређених у простору, при чему $K_u^e, K_v^e, K_w^e \geq 1$ представљају геометријске редове e -тог коначног елемента у одговарајућим правцима локалног координатног система. Аналитички, овај хексаедар описан је релацијом

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = \sum_{m=0}^{K_u^e} \sum_{n=0}^{K_v^e} \sum_{l=0}^{K_w^e} \mathbf{r}_{mnl} u^m v^n w^l, \quad -1 \leq u, v, w \leq 1, \quad (1.1)$$

где \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, Q^e$) представљају векторе положаја интерполационих чворова а $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}$ су (троструки) интерполациони полиноми Лагранжовог типа (*Lagrange interpolation polynomials*). Ови полиноми задовољавају релацију $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u_j, v_j, w_j) = \delta_{ij}$, при чему су u_j, v_j и w_j параметарске координате j -те

интерполационе тачке, а $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ представља Кронекерову делта функцију. Константни вектори

положаја \mathbf{r}_{mnl} могу се одредити полазећи од вектора \mathbf{r}_i , а имплементација помоћу њих погодна је због веће ефикасности рачунарског програма. Једначина (1.1) представља пресликавање (мапирање) родитељског елемента, у нашем случају јединичне коцке која заузима $-1 \leq u, v, w \leq 1$ део $u-v-w$ простора, у закривљени параметарски хексаедар у Декартовом $x-y-z$ простору. Ово пресликавање илустровано је на слици 1.2. У алгоритмима у оквиру метода коначних елемената најчешће се компоненте свих вектора представљају помоћу Декартових компоненти [на пример, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$], а родитељски елементи у $u-v-w$ простор користе се ради једноставније (рачунарске) имплементације у случају произвољних елемената. Једном развијеном рачунарском рутином за родитељске елементе могу се вршити прорачуни у оквиру произвољних коначних елемената.



Слика 1.2. Илустрација пресликавања родитељске јединичне коцке у закривљени параметарски хексаедар описано једначином (1.1).

1.2 Интерполациони полиноми Лагранжовог типа

Приликом конструисања троструког (тродимензионог) Лагранжовог интерполационог полинома $L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)$, неопходног за пресликавање (1.1), полази се од једноструког (једнодимензионог) Лагранжовог интерполационог полинома $L_m^{K_u^e}(u)$, $m = 0, \dots, K_u^e$, дефинисаног над доменом $-1 \leq u \leq 1$. Лагранжов интерполациони полином $L_m^{K_u^e}(u)$ је полином K_u^e -тог реда по u , јединичне вредности у

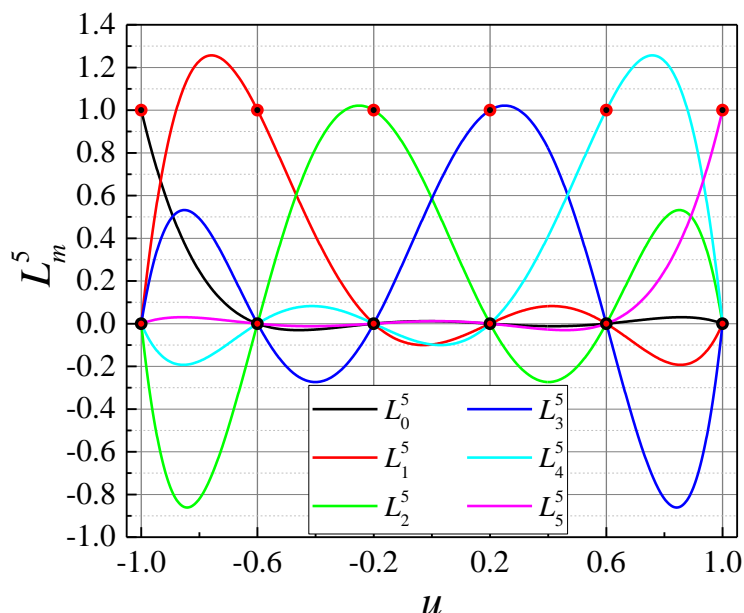
интерполационој тачки u_m и нулте вредности у свим осталим интерполационим тачкама. Математички, описан је релацијом

$$L_m^{K_u^e}(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_1)\dots(u-u_{m-1})(u-u_{m+1})\dots(u-u_{K_u^e})}{(u_m-u_0)(u_m-u_1)\dots(u_m-u_{m-1})(u_m-u_{m+1})\dots(u_m-u_{K_u^e})} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{K_u^e} \frac{u-u_j}{u_m-u_j}, \quad m=0, \dots, K_u^e, \quad (1.2)$$

где u_j ($j=0, \dots, K_u^e$) представљају интерполационе тачке у опсегу $-1 \leq u \leq 1$. У случају униформно распоређених интерполационих тачака, њихове координате одређене су једноставном релацијом

$$u_j = \frac{2j - K_u^e}{K_u^e}, \quad j=0, \dots, K_u^e. \quad (1.3)$$

На слици 1.3 приказани су (једноструки) Лагранжови интерполациони полиноми петог реда ($K_u^e = 5$). Тачкама су приказане карактеристичне вредности у интерполационим тачкама. Произвољна (континуална) функција може се апроксимирати линеарном комбинацијом Лагранжових интерполационих полинома, при чему коефицијенти у линеарном развоју одговарају вредности функције у одговарајућим интерполационим тачкама.



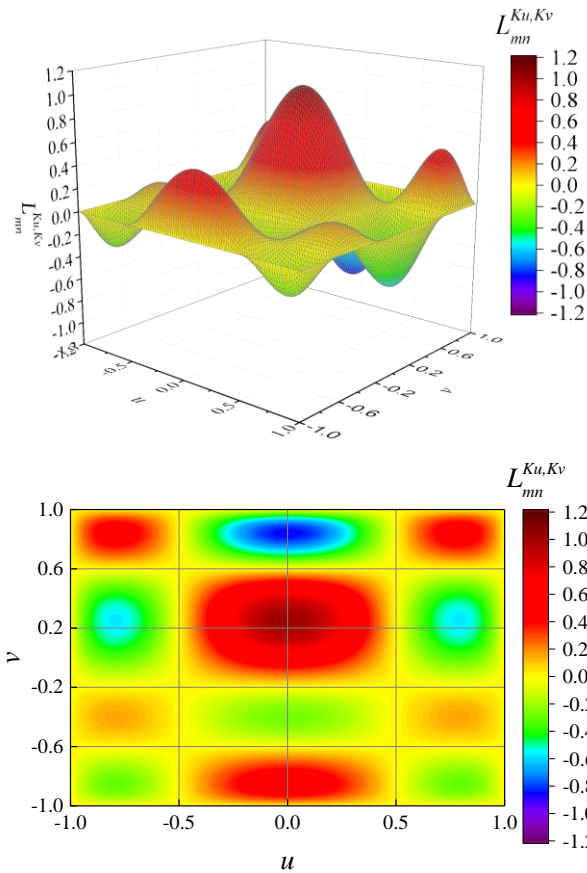
Слика 1.3. Једноструки Лагранжови интерполациони полиноми петог реда ($K_u^e = 5$).

Троструки Лагранжови интерполациони полиноми добијају се множењем једноструких Лагранжових интерполационих полинома за сваки од праваца u - v - w простора. Математички, описани су релацијом

$$L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = L_{mnl}^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = L_m^{K_u^e}(u)L_n^{K_v^e}(v)L_l^{K_w^e}(w), \quad 1 \leq i \leq Q^e, \quad (1.4)$$

при чему је $i = 1 + m + n(1 + K_u^e) + l(1 + K_u^e)(1 + K_v^e)$, $0 \leq m \leq K_u^e$, $0 \leq n \leq K_v^e$, $0 \leq l \leq K_w^e$ и $Q^e = (1 + K_u^e)(1 + K_v^e)(1 + K_w^e)$.

Просторне (троструке) функције није лако графички представити, па је због тога на слици 1.4 приказан двоструки Лагранжов интерполациони полином за $m=2$, $n=3$, $K_u^e=4$ и $K_v^e=5$, а координатне u - v линије одговарају интерполационим тачкама. Двоструки интерполациони Лагранжов полином дефинише се аналогно као у (1.4), при чему уместо производа три једнострука Лагранжова интерполациона полинома имамо производ два једнострука Лагранжова интерполациона полинома.



Слика 1.4. Двоструки Лагранжов интерполациони полином (горња слика) и његова пројекција у $u-v$ равни (доња слика) за $m=2$, $n=3$, $K_u^e=4$ и $K_v^e=5$.

1.3 Векторска алгебра и анализа у уопштеном закривљеном координатном систему

1.3.1 Примарни и реципрочни вектори

Једна од значајнијих погодности векторске анализе је што облик једначина записаних помоћу оператора просторних извода не зависи од избора координатног система. Тако и облик једначина које описују (електромагнетско) поље, примера ради Максвелове једначине у диференцијалном облику, не зависи од избора (конкретног) координатног система. Са друге стране, приликом конкретних прорачуна, векторска поља представљају се помоћу својих компоненти (скалара), тј. пројекција у односу на одређене векторе базе простора. У случају стандардних координатних система, избор вектора базе простора је праволинијски и очигледан (на пример, у случају Декартовог координатног система векторску базу простора чине ортови \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y и \mathbf{i}_z). У случају уопштених закривљених координатних система, примарни и реципрочни вектори могу чинити базу простора, а детаљи у вези са њима приказани су у наставку. Уопштени закривљени координатни системи неопходни су за дефинисање и имплементацију уопштених закривљених параметарских хексаедара који ће бити приказани и кроз неколико примера касније.

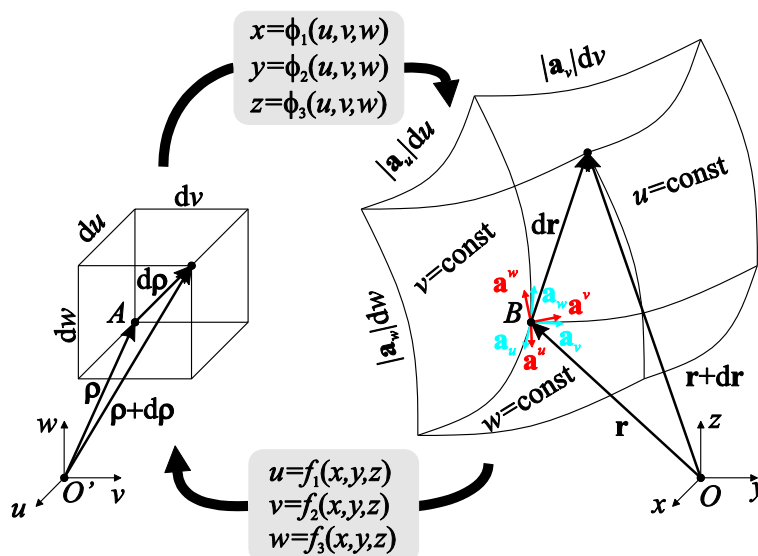
Посматрајмо три независне, континуалне и једнозначне функције Декартових координата x , y и z

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = f_3(x, y, z), \quad (1.5)$$

које пресликавају тачку $B(x, y, z)$ Декартовог координатног система у одговарајућу тачку $A(u, v, w)$ $u-v-w$ координатног система. Систем једначина (1.5) може се решити по x , y и z . Нека су тако новодобијене функције из (1.6) такође континуалне, независне и једнозначне. Ове функције пресликавају тачку A из $u-v-w$ координатног система у одговарајућу тачку B у Декартовом координатном систему као

$$x = \phi_1(u, v, w), \quad y = \phi_2(u, v, w) \quad \text{и} \quad z = \phi_3(u, v, w). \quad (1.6)$$

Променљиве u , v и w називају се уопштеним (или закривљеним) координатама, а често се у литератури ради лакше манипулације записују у индексној нотацији (на пример, као ω^i или као u^i). Ми ћемо уопштене координате у индексној нотацији обележаваћемо као q^i , ($i=1,2,3$). Конкретно, у нашем случају $q^1 = u$, $q^2 = v$ и $q^3 = w$. Пресликавање између ова два координатна система илустровано је на слици 1.5.



Слика 1.5. Илустрација пресликавања између Декартовог и уопштеног закривљеног координатног система.

Кроз тачку B уопштеног u - v - w координатног система пролазе три координатне површи којима одговара једна константна уопштена координата ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$ односно $w = \text{const}$). Такође, кроз тачку B пролазе три координатне линије којима одговарају две константне уопштене координате и једна променљива уопштена координата (на пример, $u \neq \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$).

Нека вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ представља вектор положаја тачке B у односу на произвољан координатни почетак O , а нека је $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u, v, w)$ одговарајући вектор положаја тачке A у односу на координатни почетак O' . Компоненте вектора положаја \mathbf{r} и $\boldsymbol{\rho}$ повезане су трансформацијама (1.5) и (1.6). Тада се вектор положаја \mathbf{r} може представити у функцији уопштених координата

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z = \phi_1(u, v, w)\mathbf{i}_x + \phi_2(u, v, w)\mathbf{i}_y + \phi_3(u, v, w)\mathbf{i}_z = \mathbf{r}(u, v, w). \quad (1.7)$$

Прираштај вектора положаја \mathbf{r} услед елементарног помераја дуж (уопштених) координатних линија је

$$d\mathbf{r}(u, v, w) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw, \quad (1.8)$$

а одговарајући прираштај вектора $\boldsymbol{\rho}$ је $d\boldsymbol{\rho}$.

Полазећи од (1.8), прираштај вектора \mathbf{r} може се написати и у облику

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i dq^i = \mathbf{a}_u du + \mathbf{a}_v dv + \mathbf{a}_w dw, \quad (1.9)$$

при чему се вектори

$$\mathbf{a}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{a}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \quad (1.10)$$

називају примарни вектори и дефинисани су као $\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $i=1,2,3$. У нашем случају $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_u$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_v$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_w$. Ови вектори могу да представљају једну од база уопштеног закривљеног координатног

система¹, а њихов правац тангентан је на одговарајуће уопштене координатне линије. Смер им је у смеру пораста уопштених координата.

Произвољан вектор \mathbf{F} сада се може представити помоћу примарних вектора који чине базу простора као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \mathbf{a}_i = F^u \mathbf{a}_u + F^v \mathbf{a}_v + F^w \mathbf{a}_w, \quad (1.11)$$

при чему се F^i , $i=1,2,3$, тј. F^u , F^v и F^w називају контраваријантним компонентама вектора \mathbf{F} у $u-v-w$ координатном систему.

Посматрајмо сада елементарну запремину у $u-v-w$ координатном систему (елементарни квадар дужина ивица du , dv и dw) и одговарајући закривљени паралелепипед у Декартовом координатном систему (дужина ивица $|\mathbf{a}_u|du$, $|\mathbf{a}_v|dv$ и $|\mathbf{a}_w|dw$). Однос њихових запремина је (не узимајући знак у обзир, тј. под претпоставком да примарни вектори \mathbf{a}_u , \mathbf{a}_v и \mathbf{a}_w чине триедар десне оријентације)

$$J = \frac{\mathbf{a}_u du \cdot (\mathbf{a}_v dv \times \mathbf{a}_w dw)}{du dv dw} = \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w) = \mathbf{a}_v \cdot (\mathbf{a}_w \times \mathbf{a}_u) = \mathbf{a}_w \cdot (\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v), \quad (1.12)$$

при чему J уједно представља и јакобијан (детерминанту Јакобијеве матрице) $u-v-w$ координатног система. Сада је могуће дефинисати три нова вектора који чине нову базу простора као

$$\mathbf{a}^u = \frac{1}{J} \mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w, \quad \mathbf{a}^v = \frac{1}{J} \mathbf{a}_w \times \mathbf{a}_u \quad \text{и} \quad \mathbf{a}^w = \frac{1}{J} \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v. \quad (1.13)$$

Вектори \mathbf{a}^u , \mathbf{a}^v и \mathbf{a}^w називају се реципрочни вектори, управни су на одговарајуће уопштене координатне површи и задовољавају релацију

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.14)$$

при чему је у нашем случају $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^u$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^v$ и $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^w$, а δ_{ij} је Кронекерова делта функција. Произвољан вектор \mathbf{F} може се сада представити и помоћу реципрочних вектора као

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{a}^i = F_u \mathbf{a}^u + F_v \mathbf{a}^v + F_w \mathbf{a}^w, \quad (1.15)$$

при чему се F_i , $i=1,2,3$, тј. F_u , F_v и F_w називају коваријантним компонентама вектора \mathbf{F} у $u-v-w$ координатном систему, а на основу (1.14) одређују се као

$$F_u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_u, \quad F_v = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_v \quad \text{и} \quad F_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_w. \quad (1.16)$$

Такође, на основу (1.14), контраваријантне компоненте вектора \mathbf{F} одређују се као

$$F^u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^u, \quad F^v = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^v \quad \text{и} \quad F^w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^w. \quad (1.17)$$

Аналогно, полазећи од (1.12) и (1.13), примарни вектори могу се изразити помоћу реципрочних вектора као

$$\mathbf{a}_u = J(\mathbf{a}^v \times \mathbf{a}^w), \quad \mathbf{a}_v = J(\mathbf{a}^w \times \mathbf{a}^u) \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_w = J(\mathbf{a}^u \times \mathbf{a}^v). \quad (1.18)$$

Важно је напоменути и то да је декларисање вектора као примарних и реципрочних потпуно произвољно. За један скуп примарних и реципрочних вектора, постоји други скуп примарних и реципрочних вектора, при чему су примарни вектори првог скупа реципрочни вектори другог скупа и обрнуто. Са друге стране, када је једном дато пресликавање (1.6) помоћу њега су одређени примарни и реципрочни вектори првог скупа изразима (1.7), (1.10), (1.12) и (1.13). Да би се одредила веза између примарних и реципрочних вектора првог скупа и примарних и реципрочних вектора другог скупа, потребно је одредити други скуп функција пресликавања (γ_1 , γ_2 и γ_3 уместо f_1 , f_2 и f_3),

¹ Важно је напоменути да примарни вектори не морају бити јединичне дужине и међусобно управни. У зависности од трансформација (1.5) и (1.6) не морају чак бити ни истих димензија у два координатна система (на пример, вектори $\partial \mathbf{r} / \partial \phi$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$ у сферном координатном систему су димензије дужине, а у Декартовом координатном систему $\partial \mathbf{r} / \partial x$ је без димензије).

$$x = \gamma_1(u, v, w), \quad y = \gamma_2(u, v, w) \quad \text{и} \quad z = \gamma_3(u, v, w), \quad (1.19)$$

тако да примарни вектори другог скупа буду једнаки реципрочним векторима првог скупа. Ово захтева решавање сложених система диференцијалних једначина (по γ_1 , γ_2 и γ_3). У општем случају овај систем једначина не мора имати решење у затвореном облику.

1.3.2 Градијент, дивергенција и ротор

Посматрајмо скаларну функцију f и векторску функцију \mathbf{F} . Нека је просторна зависност ових функција изражена помоћу контраваријантних компоненти вектора положаја (тј. помоћу уопштених координата u , v и w), и нека су функције записане у облику $f = f(u, v, w)$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v, w)$. Тада је згодно просторне изводе (градијент, дивергенцију и ротор) представити у облику са парцијалним изводима по уопштеним координатама u , v и w .

Градијент скаларне функције f у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{a}^u + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{a}^v + \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{a}^w, \quad (1.20)$$

при чему је $q^1 = u$, $q^2 = v$ и $q^3 = w$, а $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^u$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^v$ и $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^w$.

Дивергенција векторске функције \mathbf{F} у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^i} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (J F^i)}{\partial q^i} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial (J F^u)}{\partial u} + \frac{\partial (J F^v)}{\partial v} + \frac{\partial (J F^w)}{\partial w} \right], \quad (1.21)$$

при чему је J јакобијан у u - v - w координатном систему дефинисан у (1.12).

Ротор векторске функције \mathbf{F} у уопштеном закривљеном координатном систему може се одредити као

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^i} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ F_u & F_v & F_w \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial F_w}{\partial v} - \frac{\partial F_v}{\partial w} \right) \mathbf{a}_u + \left(\frac{\partial F_u}{\partial w} - \frac{\partial F_w}{\partial u} \right) \mathbf{a}_v + \left(\frac{\partial F_v}{\partial u} - \frac{\partial F_u}{\partial v} \right) \mathbf{a}_w \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Приликом векторске анализе у уопштеном закривљеном координатном систему, произвољна векторска функције \mathbf{F} може се потпуно равноправно представити помоћу контраваријантних пројекција и примарних вектора као у (1.11) или помоћу коваријантних пројекција и реципрочних вектора као у (1.15).

Посматрајмо сада, за почетак, посебан случај у коме је векторска функција $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v, w)$ изражена помоћу контраваријантних пројекција и примарних вектора [као у (1.11)]. Нека нам је од значаја да одредимо њен ротор. Да бисмо могли да користимо израз (1.22) за одређивање ротора, потребно је наћи везу између контраваријантних (F^u , F^v и F^w) и коваријантних (F_u , F_v и F_w) компоненти функције \mathbf{F} у затвореном (аналитичком) облику. То подразумева решавање система диференцијалних једначина, што може бити аналитички врло захтевно. У општем случају овај систем диференцијалних једначина чак ни не мора имати аналитичко (затворено) решење. До везе између контраваријантних (F^u , F^v и F^w) и коваријантних (F_u , F_v и F_w) пројекција функције \mathbf{F} се (тада) може доћи и нумеричким решавањем система диференцијалних једначина. Нумеричко решавање система диференцијалних једначина може бити врло захтевно са становишта рачунарских ресурса и по правилу уноси одређену (нумеричку грешку), па га је пожељно избећи кад год је то могуће. Други начин за прорачун ротора био би замена парцијалних извода у изразу (1.22) коначним разликама, а затим њихов нумерички прорачун. Према томе, закључујемо да је, када год је потребно одредити ротор векторске функције изражене помоћу u , v и w координата, погодно функцију представити у облику (1.15), тј. помоћу реципрочних вектора и коваријантних компоненти. Аналогним резонавањем закључујемо да је, кад год је потребно одредити дивергенцију векторске функције изражене помоћу u , v

и w координата, погодно функцију представити у облику (1.11), тј. помоћу примарних вектора и контраваријантних пројекција.

1.4 Векторска алгебра и анализа за уопштене закривљене параметарске хексаедре Лагранжовог типа

Векторска алгебра и анализа за уопштени закривљени координатни систем, изложене до сада, важе у општем случају. Функције пресликавања $[f_1, f_2, f_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3]$ у изразима (1.5) и (1.6) између уопштеног $u-v-w$ и Декартовог координатног система могу попримити произвољан облик. У посебном случају, када је то пресликавање описано Лагранжовим интерполационим полиномима као у (1.1), већина израза може се поједноставити.

У случају уопштених закривљених параметарских хексаедара, примарни вектор \mathbf{a}_u одређује се заменом (1.1) у (1.10)

$$\mathbf{a}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w) = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i \frac{\partial L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)}{\partial u}. \quad (1.23)$$

Вектори положаја интерполационих чворова \mathbf{r}_i , $i=1, \dots, Q^e$, константни су и на њих парцијални извод (по уопштеној координати u) не делује. На основу (1.4) и (1.2) одређујемо парцијални извод Лагранжових интерполационих полинома

$$\frac{\partial L_i^{K_u^e, K_v^e, K_w^e}(u, v, w)}{\partial u} = \frac{\partial L_m^{K_u^e}(u)}{\partial u} L_n^{K_v^e}(v) L_l^{K_w^e}(w) \quad \text{и} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial L_m^{K_u^e}(u)}{\partial u} = L_m^{K_u^e}(u) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{K_u^e} \frac{1}{u - u_k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{K_u^e} \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m \\ j \neq k}}^{K_u^e} \frac{u - u_j}{u_m - u_j}}{u_m - u_k}. \quad (1.25)$$

Заменом (1.24) и (1.25) у (1.23) долазимо до финалног израза за примарни вектор \mathbf{a}_u у уопштеном закривљеном параметарском хексаедру Лагранжовог типа

$$\mathbf{a}_u = \sum_{i=1}^{Q^e} \mathbf{r}_i \frac{\partial L_m^{K_u^e}(u)}{\partial u} L_n^{K_v^e}(v) L_l^{K_w^e}(w). \quad (1.26)$$

Аналогним поступком могуће је одредити и остала два примарна вектора \mathbf{a}_v и \mathbf{a}_w . Сада се на основу израза (1.12) одређује јакобијан за $u-v-w$ координатни систем, а на основу израза (1.13) и реципрочни вектори.

Важно је напоменути да, иако је просторна зависност свих вектора у уопштеним закривљеним параметарским хексаедрима изражена у функцији уопштених (тј. локалних u , v и w) координата, сви вектори могу да се представе помоћу својих Декартових компоненти, тј. могу да се запишу у облику $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{a}_u = (a_{u,x}, a_{u,y}, a_{u,z})$ и $\mathbf{a}^u = (a_x^u, a_y^u, a_z^u)$, и аналогно за остале векторе. Ово је очигледно на основу (1.26): ако су вектори \mathbf{r}_i изражени помоћу својих Декартових компоненти и вектор \mathbf{a}_u ће бити изражен помоћу својих Декартових компоненти. На овај начин могуће је приликом манипулације векторима користити (познате и једноставне) изразе векторске алгебре за Декартов координатни систем. На пример за сабирање, скаларно множење и векторско множење (било која) два вектора, формуле су

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j = (x_i + x_j, y_i + y_j, z_i + z_j), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}^v = a_{u,x} a_x^v + a_{u,y} a_y^v + a_{u,z} a_z^v \quad \text{и} \quad (1.28)$$

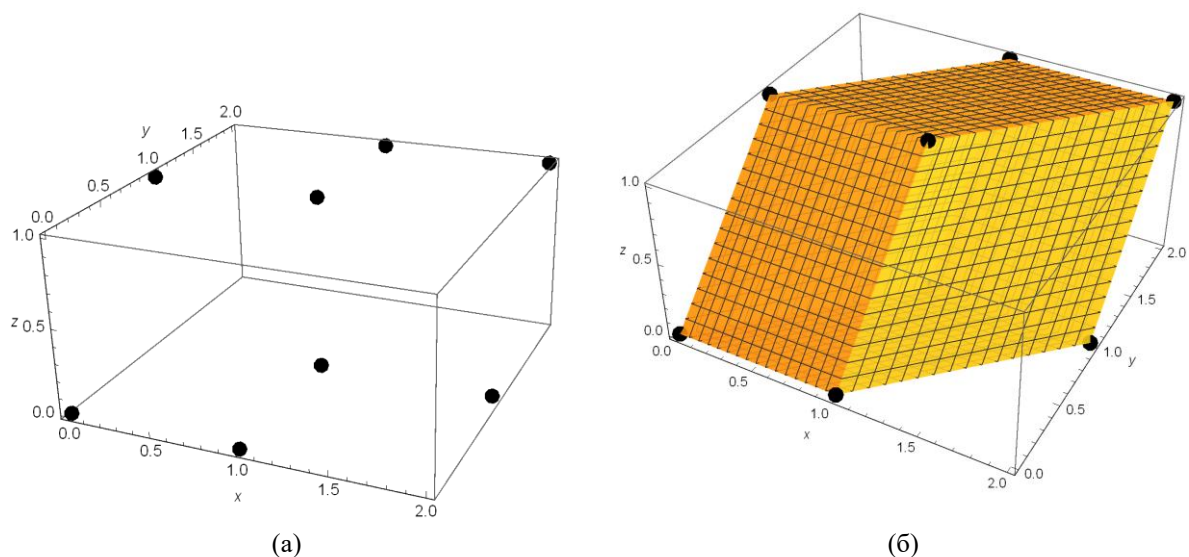
$$\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}^v = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ a_{u,x} & a_{u,y} & a_{u,z} \\ a_x^v & a_y^v & a_z^v \end{vmatrix}, \quad (1.29)$$

при чему су \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y и \mathbf{i}_z ортови Декартовог координатног система. Аналогни изрази важе и за остале векторске комбинације [на пример, мешовити производ три вектора $\mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}^w)$].

1.5 Примери употребе уопштеног закривљеног параметарског хексаедра Лагранжовог типа

У овом одељку приказано је неколико примера употребе уопштеног интерполационог закривљеног параметарског хексаедра за моделовање различитих облика. Ови примери требало би да илуструју геометријску флексибилност оваквих елемената, односно њихову способност да релативно сложене структуре релативно тачно моделују помоћу малог броја коначних елемената. Када се овакви коначни елементи упаре са функцијама базиса вишег реда, добија се метод коначних елемената који може бити врло ефикасан.

Као први пример, на слици 1.6 приказан је паралелепипед дефинисан помоћу вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i}_x$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z$. Овај паралелепипед описан је геометријски егзактно помоћу једног коначног елемента првог геометријског реда ($K_u^e = K_v^e = K_w^e = 1$) који је приказан на слици 1.6(б). За дефиницију коначног елемента првог реда, према формули (1.1), потребно је $Q^e = 8$ интерполационих тачака. Интерполационе тачке које описују посматрани паралелепипед приказане су на слици 1.6(а), а координате тих интерполационих тачака дефинисане су векторима \mathbf{r}_i у формули (1.1). Ради прегледности и боље оријентације, ове интерполационе тачке приказане су и на слици 1.6(б) заједно са посматраним елементом (паралелепипедом). У односу на квадар, паралелепипед представља нешто геометријски флексибилнији елемент. Паралелепипед има равне стране, а две наспрамне стране су паралелне. У примерима у којима је потребна незнатно већа флексибилност моделовања у односу на квадар, коначни елемент приказан на слици 1.6(б) може бити од користи.

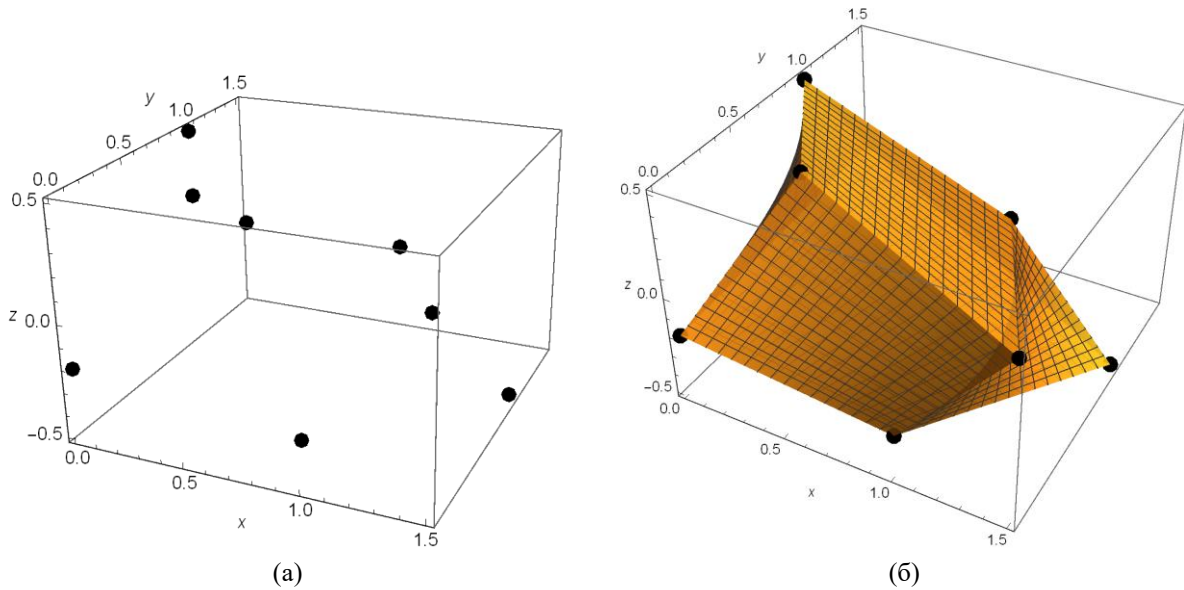


Слика 1.6. Паралелепипед, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 1$, $Q^e = 8$.

Као следећи пример, на слици 1.7 приказан је уопштени трилинеарни хексаедар. Овакав елемент у сваком од три правца користи линеарну геометријску апроксимацију ($K_u^e = K_v^e = K_w^e = 1$), одакле му и потиче назив (трилинеарни). На слици 1.7(а) приказан је положај интерполационих тачака, а на слици 1.7(б) изглед самог елемента. За разлику од претходног случаја, интерполационе тачке које припадају једној страници не морају лежати у једној равни, већ могу бити произвољно распоређене у простору². У односу на претходни случај, овакав елемент поседује значајно већу геометријску флексибилност, при чему му сложеност није повећана (и даље је дефинисан помоћу $Q^e = 8$ интерполационих тачака). Овакав елемент може се схватити као добар компромис између геометријске

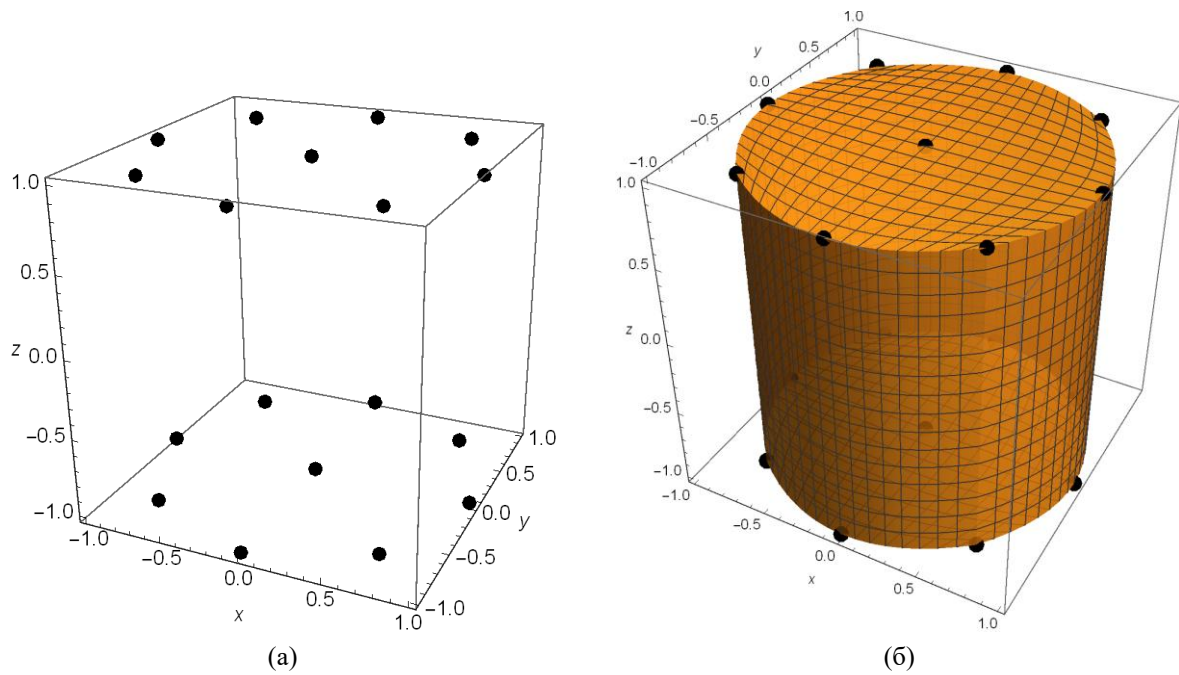
² Наравно, потребно је водити рачуна да све интерполационе тачке буду распоређене тако да се две стране хексаедра не пресеку међусобно.

флексбилности, са једне стране, и сложености, са друге стране. Странице оваког елемента су билинеарне површи.

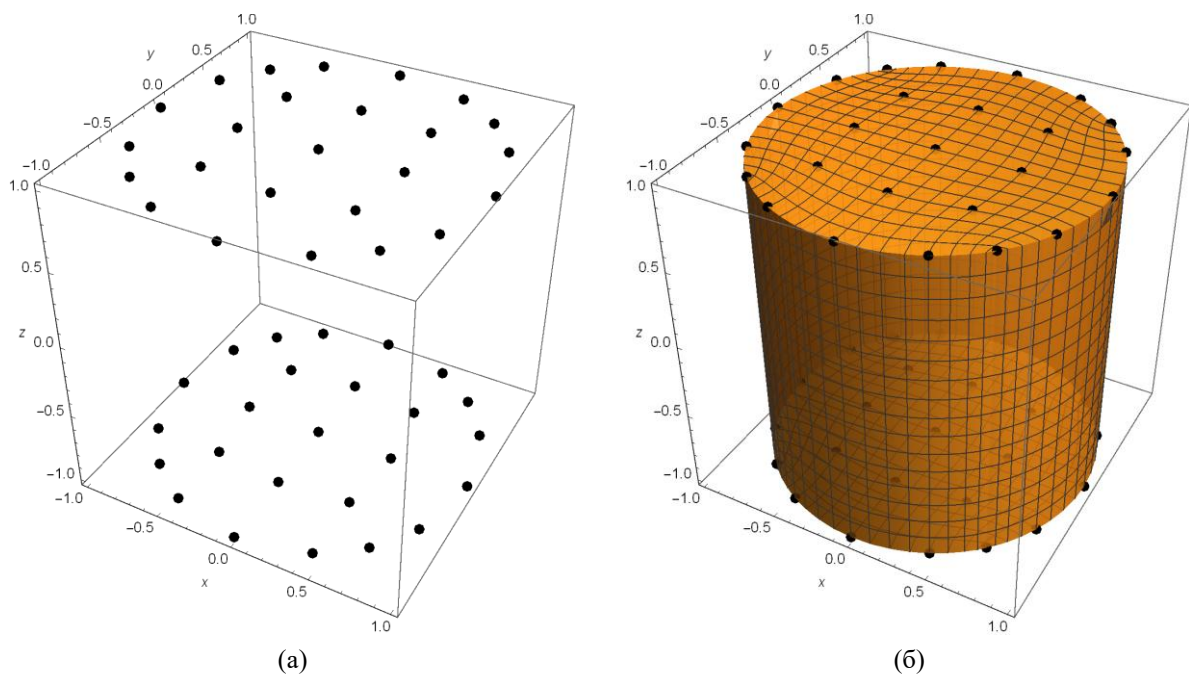


Слика 1.7. Трилинеарни хексаедар, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 1$, $Q^e = 8$.

На слици 1.8 приказана је геометријска апроксимација ваљка помоћу једног коначног елемента. Пошто се омотач ваљка може добити помоћу генератрисе која је права линија, за моделовање ваљка помоћу уопштеног параметарског хексаедра довољан је први геометријски ред елемента у том правцу, конкретно у правцу z -осе на слици 1.8 којој одговара w -оса родитељског координатног система ($K_w^e = 1$). Кружни попречни пресек ваљка геометријски је апроксимиран интерполационим полиномима другог реда у правцима x - и y -осе којима одговарају u - и v -осе родитељског координатног система ($K_u^e = K_v^e = 2$). Иако се кружница не може егзактно описати интерполационим полиномима другог реда, са слике 1.8(б) види се да су интерполациони полиноми другог реда довољне тачности за већину инжењерских примена, а овакав елемент описан је помоћу $Q^e = 18$ интерполационих тачака. У случају када је потребна већа геометријска тачност, попречни пресек ваљка може се описати интерполационим полиномима вишег реда, а на слици 1.9 приказан је случај када је $K_u^e = K_v^e = 4$, када је коначни елемент описан помоћу $Q^e = 50$ интерполационих тачака. Већ на овом примеру могу се наслутити предности које уопштени закривљени параметарски хексаедри поседују у односу на стандардне елементе приказане на слици 1.1. Ако би се у методу коначних елемената за геометријско моделовање користио било који од стандардних елемената са слике 1.1 за моделовање ваљка био би потребан велики број таквих (ситних) коначних елемената, што би резултовало великим бројем коначних елемената са ниским степеном функција базиса, а ово би финално водило ка релативно неефикасном нумеричком моделу.

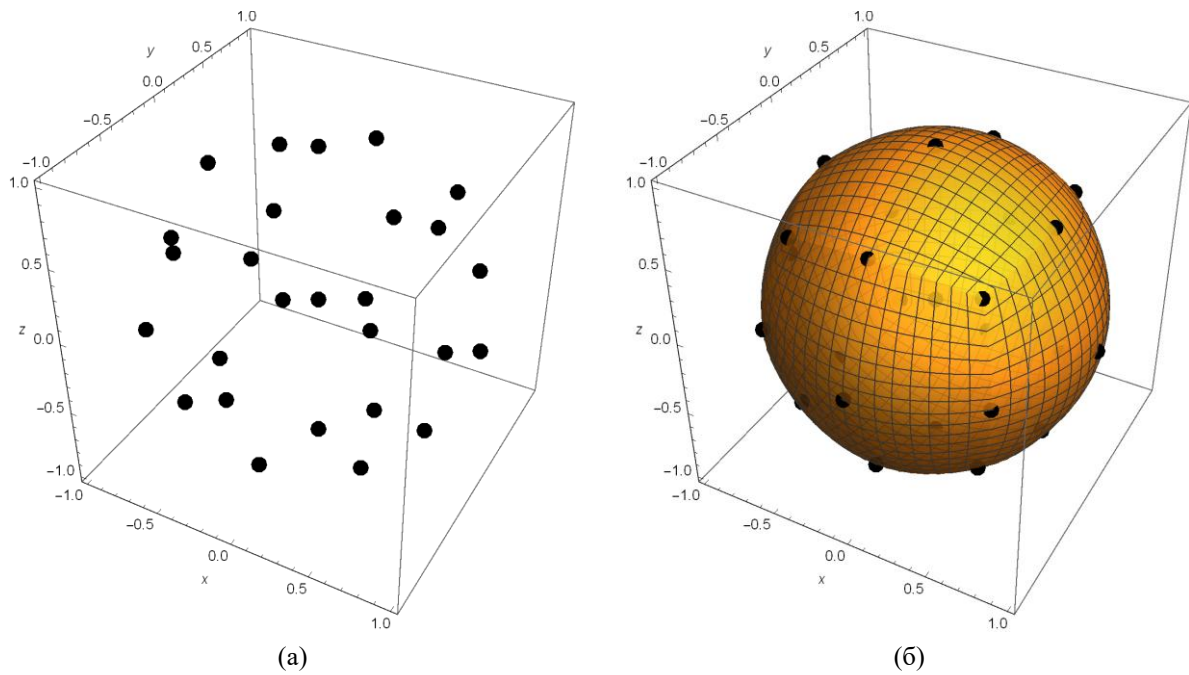


Слика 1.8. Ваљак, $K_u^e = K_v^e = 2$, $K_w^e = 1$, $Q^e = 18$.

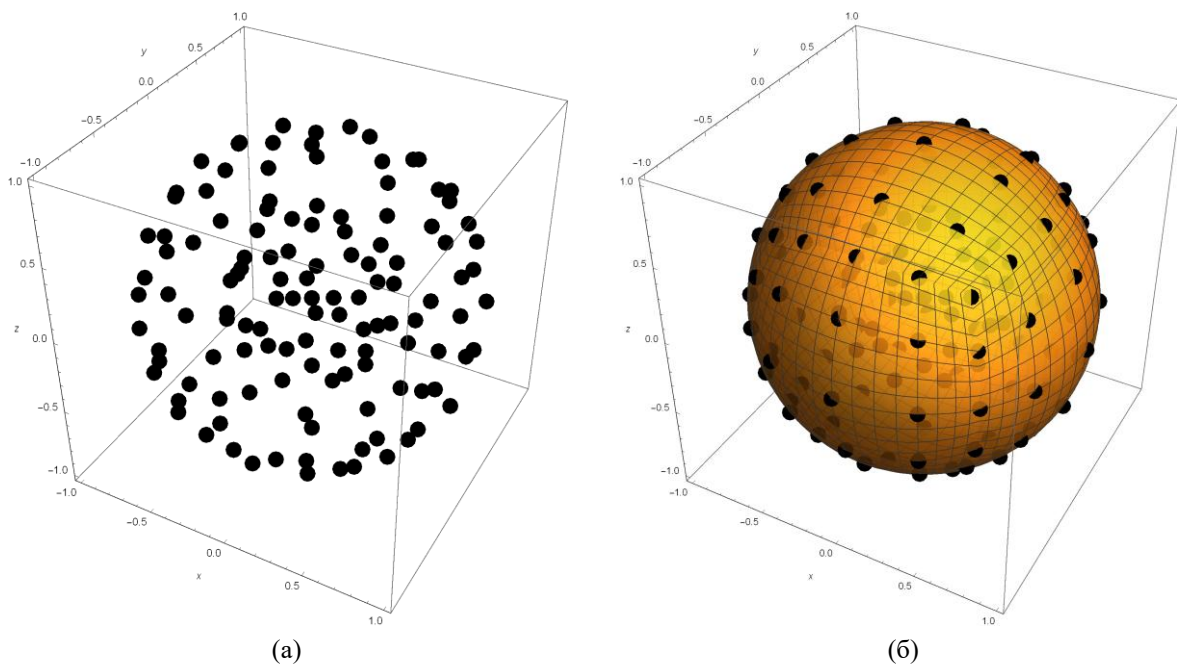


Слика 1.9. Ваљак, $K_u^e = K_v^e = 4$, $K_w^e = 1$, $Q^e = 50$.

На слици 1.10 приказана је геометријска апроксимација лопте једним елементом са интерполационим полиномима другог реда ($K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$). Овакав елемент дефинисан је помоћу $Q^e = 27$ интерполационих тачака и у већини инжењерских примена представља задовољавајуће тачну геометријску апроксимацију лопте. У случајевима када је потребна и већа тачност геометријске апроксимације, редови интерполационих полинома могу се повећати, а на слици 1.11 приказан је пример за $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 4$. Елемент са слике 1.11 дефинисан је помоћу $Q^e = 125$ интерполационих тачака. Ова два примера додатно илуструју изузетну геометријску флексибилност уопштених закривљених параметарских хексаедара у односу на стандардне елементе са слике 1.1. За прецизно геометријско моделовање лопте помоћу стандардних елемената са слике 1.1 потребно је реда неколико хиљада коначних елемената, а када се користи уопштени закривљени хексаедар лопта се прецизно моделује помоћу само једног коначног елемента.



Слика 1.10. Сфера, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$, $Q^e = 27$.



Слика 1.11. Сфера, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 4$, $Q^e = 125$.

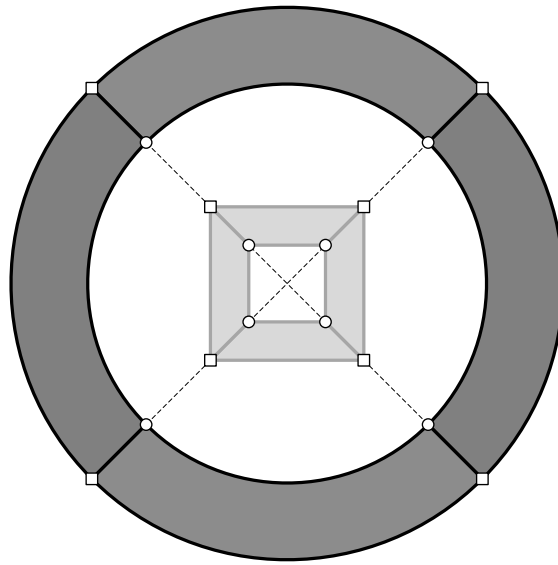
Као следећи пример, разматраћемо моделовање сферне љуске помоћу уопштених закривљених параметарских интерполационих Лагранжових елемената. Сферна љуска моделована је помоћу шест елемената, а из разлога симетрије свих шест коначних елемената једнаки су. Сваки елемент је облика правилне зарубљене четворостране пирамиде, чије су основе закривљене тако да належу на унутрашњу и спољашњу површ сферне љуске.

Као илустрација, на слици 1.12 приказана је аналогна геометрија у дводимензионом простору, односно приказан је један од начина конструкције кружног прстена полазећи од квадратног прстена. Квадратни прстен представљен је помоћу четири трапеца, а темена ових трапеца пројектована су из центра структуре на концентрични кружни прстен. На овај начин добијају се темена четири елемента која чине кружни прстен. Закривљеност ових елемената може се, на пример, моделовати интерполационим полиномом другог реда.

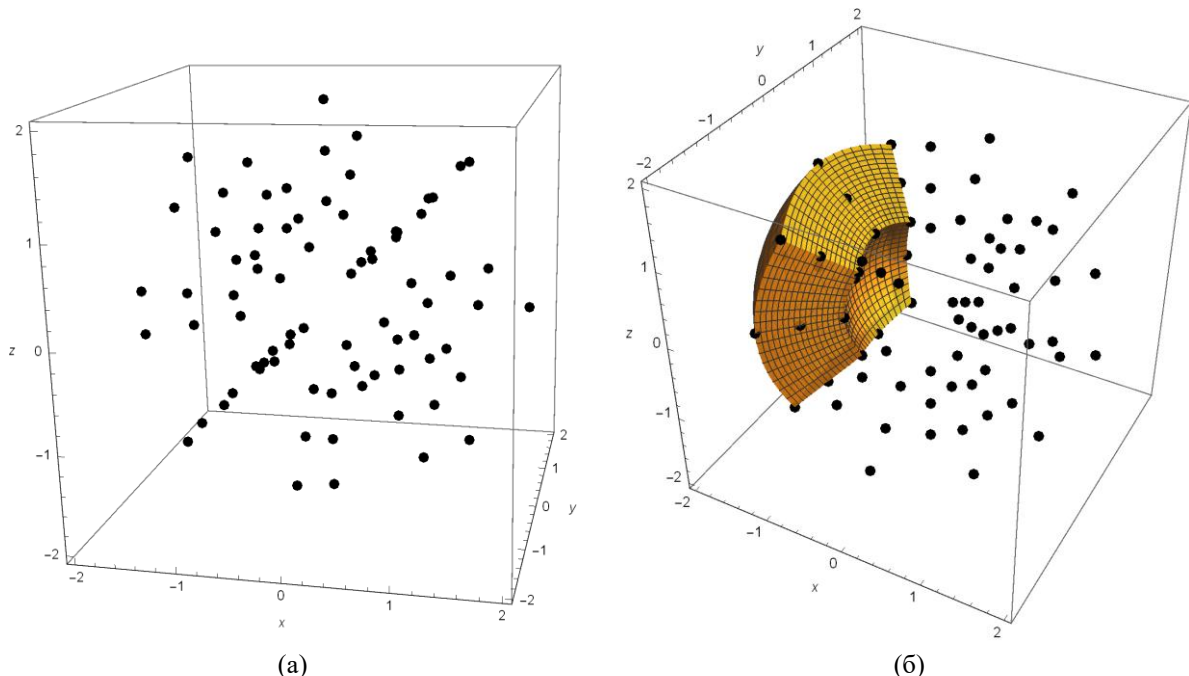
Полазећи од дводимензионог модела са слике 1.12, на аналоган начин конструисани су и елементи тродимензионог модела. Полази се од коцкасте љуске која је представљена помоћу шест

правилних зарубљених четвоространих пирамида. Темена ових пирамида централно су пројектована на концентричну сферну љуску, а закривљеност површи између одговарајућих интерполационих тачака апроксимирана је помоћу два интерполациона полинома другог геометријског реда. У случају да је потребна већа тачност геометријске апроксимације, уместо интерполационих полинома другог реда могу се користити интерполациони вишег реда.

На слици 1.13 приказан је један од шест елемената који чине сферну љуску. Сви елементи су другог геометријског реда ($K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$), а за дефиницију једног коначног елемента потребно је $Q^e = 27$ интерполационих тачака. Пошто на спојевима коначни елементи два или три елемента деле заједничке интерполационе тачке, укупан број интерполационих тачака потребан за дефиницију сферне љуске је $Q = 6Q^e - 12 \cdot 3 - 8 \cdot 2 \cdot 3 = 78$.



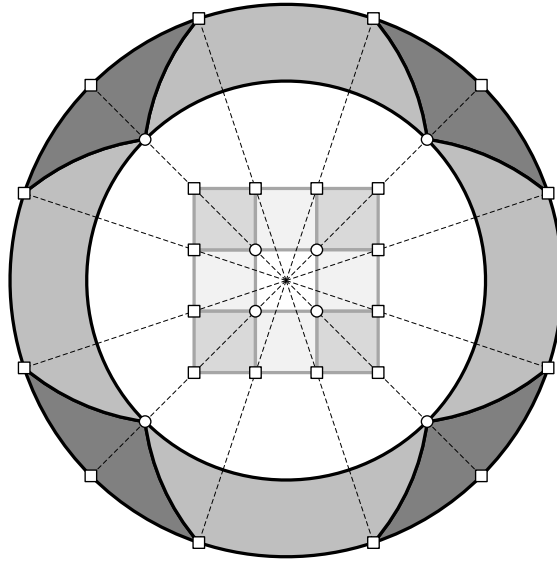
Слика 1.12. Илустрација пресликавања квадратног прстена на кружни прстен.



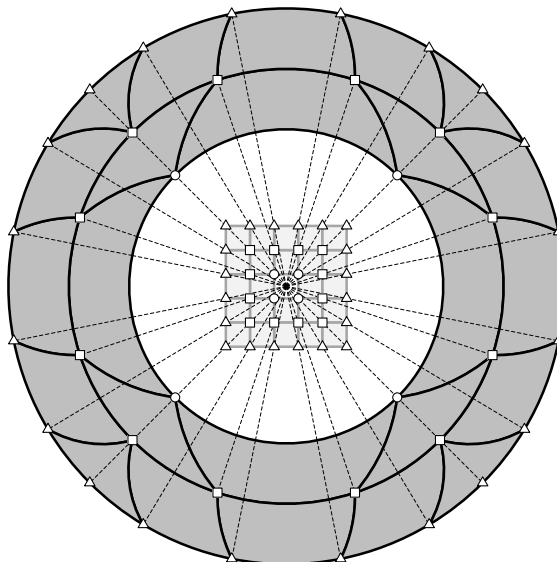
Слика 1.13. Један од шест коначних елемената који чине сферну љуску, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$, $Q^e = 27$, $Q = 78$.

Као последњи пример, конструисаћемо другачији модел сферне љуске. Појмимо од дводимензионе геометрије приказане на слици 1.14, код које се квадратни прстен представља помоћу 8 квадрата, темена ових квадрат пројектују се на концентрични кружни прстен, а та темена одређују

начин на који се кружни прстен даље дели³. На основу ове илустрације, видимо да постоје два типа елемената која сачињавају кружни прстен. Један од тих типова означен је на слици 1.14 светлијом сивом бојом, а други тип тамнијом сивом бојом. Такође, приметимо да су код елемената означених тамнијом сивом бојом у средишњем темену на спољашњој линији кружног прстена примарни (односно реципрочни) вектори практично колинеарни, што значајно отежава моделовање радијалне компоненте вектора у околини тог темена као и јакобијана трансформације између родитељског елемента и финалног елемента⁴, што представља недостатак оваквог типа моделовања са становишта могућности коначног елемента да адекватно моделује произвољан проблем. Са друге стране, главни разлог за овакав начин моделовања кружног прстена је што овакав начин повећава број коначних елемената у наредном прстену (већег полупречника) у случају да је структура моделована помоћу два или више кружна прстенова. Као илустрација на слици 1.15 приказан је случај када имамо два концентрична прстена. На тај начин релативно дебео кружни прстен може се моделовати већим бројем концентричних кружних прстенова код којих су коначни елементи приближно сличних димензија.



Слика 1.14. Илустрација пресликавања квадратног прстена на кружни прстен на други начин.



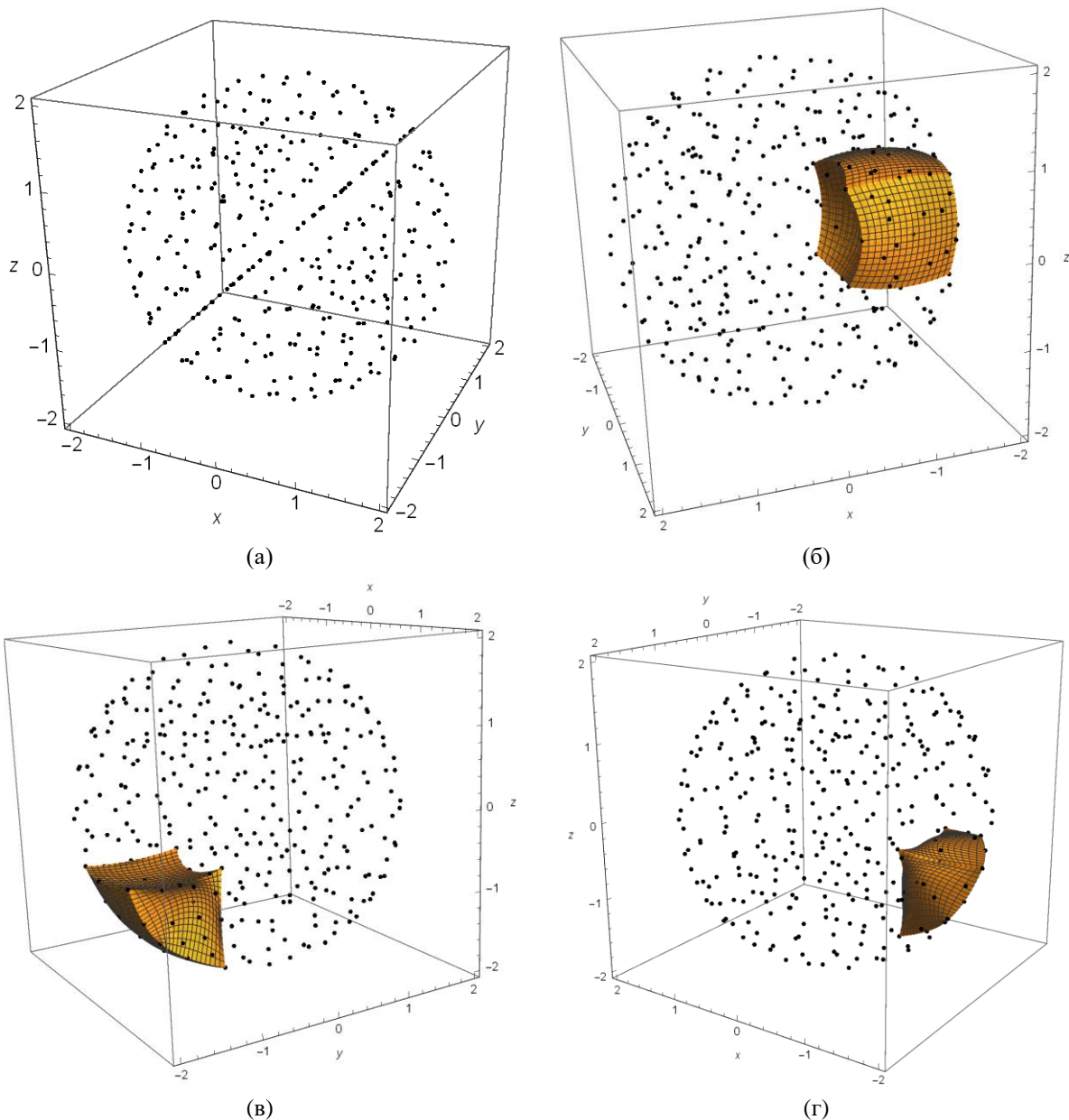
Слика 1.15. Илустрација пресликавања два квадратна прстена на два кружна прстена на други начин.

Слично као и раније, тродимензиони модел сферне љуске може се конструисати полазећи од дводимензионог модела са слике 1.14. У том случају пошло би се од коцкасте љуске која се састоји од

³ Обратити пажњу да су странице свих елемената који сачињавају кружни прстен сада закривљене.

⁴ Вектор у дводимензионом простору може се описати на начин аналоган ономе у (1.11) односно (1.15), а јакобијан аналогно као у (1.12).

26 елемената, а њихова темена пројектовала би се на сферну луску која се моделује. Са друге стране, за разлику од дводимензионог модела са слике 1.14, у случају аналогне тродимензионе структуре постоји три типа коначних елемената. Први тип одговара елементима који су аналогни светлије сивим елементима са слике 1.14, а један такав елемент приказан је на слици 1.16(б). Други тип елемената аналоган је тамније сивим елементима са слике 1.14 који у случају тродимензионе структуре имају само једну ивицу дуж унутрашње површи сферне луске. Један такав елемент приказан је на слици 1.16(в). Финално, трећи тип елемената аналоган је тамније сивим елементима са слике 1.14 који у случају тродимензионе структуре имају само једно теме на унутрашњој површи сферне луске. Један овакав елемент приказан је на слици 1.16(г). У овом примеру сферна луска моделована је елементима другог геометријског реда ($K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$), сферна луска састоји се од 26 коначних елемената, а сваки од њих дефинисан је помоћу $Q^e = 27$, а комплетна сферна луска дефинисана је помоћу $Q = 342$ интерполационе тачке. Све предности и недостаци оваквог начина моделовања сферне луске аналогне су закључцима за дводимензионе моделе са слика 1.14 и 1.15.



Слика 1.16. Један од 26 елемената који чине сферну љуску, $K_u^e = K_v^e = K_w^e = 2$.

1.6 Пример прорачуна у оквиру закривљеног параметарског хексаедра Лагранжовог типа

На примеру ваљка моделованог помоћу једног коначног елемента, слично као на сликама 1.8 и 1.9, приказаћемо процедуру прорачуна запремине коначног елемента којим се ваљак моделује, као и зависност грешке запремине коначног елемента у функцији геометријског реда. Запремина коначног елемента може се искористити као интегрална мера тачности геометријског модела. Што коначни елемент геометријски боље описује објекат који моделује, то је разлика између запремине објекта и коначног елемента мања.

Посматрајмо ваљак полупречника $r = 1 \text{ m}$ и висине $h = 2 \text{ m}$, чија је запремина $V_{\text{ваљ}} = \pi r^2 h = 2\pi \text{ m}^3$. Ваљак је моделован помоћу једног коначног елемента чији је геометријски ред у правцу осе ваљка $K_w = 1$, док су геометријски редови у правцима управним на осу ваљка $K_u = K_v = K$. Број интерполационих тачака за описивање оваквог елемента је $Q^e = 2(K+1)^2$, а на сликама 1.8 и 1.9 приказани су модели када је $K = 2$ и $K = 4$, респективно.

Прорачун запремине коначног елемента спроводимо интеграцијом по домену родитељског елемента, односно интеграцијом по запремини јединичне коцке чије координате задовољавају релацију $-1 \leq u, v, w \leq 1$. На основу (1.12), веза између елементарне запремине родитељског елемента ($du dv dw$) и посматраног коначног елемента (dV) је

$$dV = \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w) du dv dw, \quad (1.30)$$

а запремина коначног елемента је

$$V = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \int_{w=-1}^1 dV = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \int_{w=-1}^1 \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w) du dv dw, \quad (1.31)$$

при чему су $\mathbf{a}_u = \mathbf{a}_u(u, v, w)$, $\mathbf{a}_v = \mathbf{a}_v(u, v, w)$ и $\mathbf{a}_w = \mathbf{a}_w(u, v, w)$ примарни вектори дефинисани у (1.10). Претходни троструки интеграл може се написати у облику

$$V = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \int_{w=-1}^1 dV = \int_{u=-1}^1 du \int_{v=-1}^1 dv \int_{w=-1}^1 \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w) dw, \quad (1.32)$$

а сваки од ових интеграла може се нумерички прорачунати применом Гаус-Лежандрових интеграционих формула у облику

$$V = \sum_{i=0}^{NGL_u-1} cu_i \sum_{j=0}^{NGL_v-1} cv_j \sum_{k=0}^{NGL_w-1} cw_k \left(\mathbf{a}_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (\mathbf{a}_v(u_i, v_j, w_k) \times \mathbf{a}_w(u_i, v_j, w_k)) \right), \quad (1.33)$$

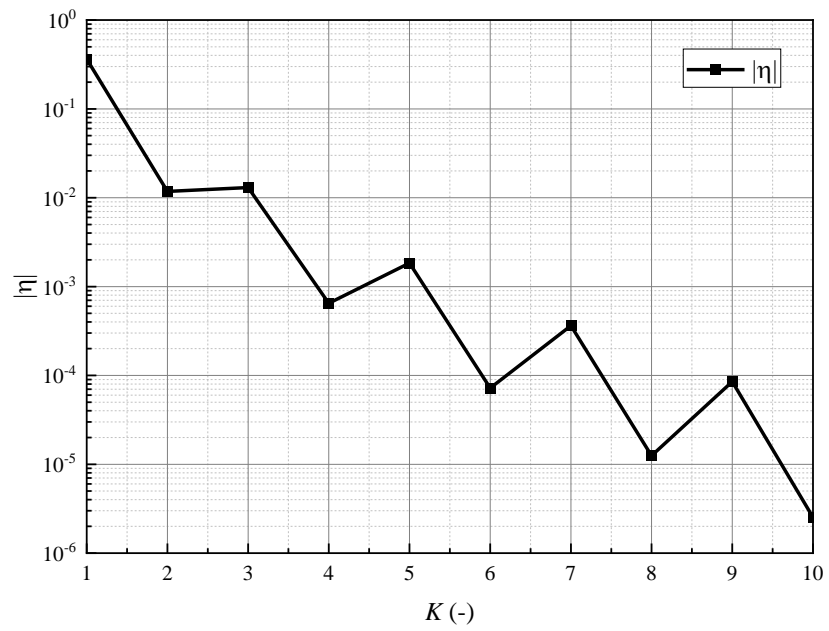
при чему су NGL_u , NGL_v и NGL_w бројеви тачака нумеричке интеграције у правцима оса u , v и w , респективно, u_i , v_j , w_k су координате тачака нумеричке интеграције, а cu_i , cv_j и cw_k су одговарајући тежински коефицијенти. На основу претходног израза, запремина коначног елемента може се израчунати као трострука сума

$$V = \sum_{i=0}^{NGL_u-1} \sum_{j=0}^{NGL_v-1} \sum_{k=0}^{NGL_w-1} cu_i \cdot cv_j \cdot cw_k \left(\mathbf{a}_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (\mathbf{a}_v(u_i, v_j, w_k) \times \mathbf{a}_w(u_i, v_j, w_k)) \right). \quad (1.34)$$

На слици 1.17 приказана је апсолутна вредност релативне грешке запремине коначног елемента прорачуната као

$$|\eta| = \left| \frac{V - V_{cyl}}{V_{cyl}} \right|, \quad (1.35)$$

у зависности од реда геометријске апроксимације K . За број тачака нумеричке интеграције у три различита правца узето је $NGL_u = K_u + 5$, $NGL_v = K_v + 5$ и $NGL_w = K_w + 5$. Са овог графика јасно се види да са повећањем реда геометријске апроксимације коначни елемент све боље геометријски описује ваљак. Побољшање тачности геометријског модела добија се на рачун веће флексибилности коначног елемента, без потребе за повећањем броја коначних елемената. Ово је једна од значајних предности геометријски флексибилних коначних елемената у односу на стандардне коначне елементе приказане на слици 1.1. Такође, са овог графика се види да се за већину инжењерских проблема ваљак задовољавајуће тачно може моделовати коначним елементима до четвртог геометријског реда, односно да су ретке ситуације када је за моделовање ваљка потребно користити елементе геометријског реда вишег од четвртог.



Слика 1.17. Абсолютна вредност релативне грешке нумерички прорачунате запремине ваљка у функцији реда геометријске апроксимације.