

Marija Stevanović

Mikrotalasno formiranje slike

Microwave Imaging

Akadska misao
Beograd, 2016.

Marija Stevanović

MIKROTALASNO FORMIRANJE SLIKE

Microwave Imaging

Izdaje i štampa

AKADEMSKA MISAO, Beograd

Dizajn naslovne strane

Zorica Marković, akademski slikar

Tiraž

100 primeraka

ISBN 978-86-7466-619-7

SADRŽAJ

UVOD	5
OSNOVI LOKALIZACIJE	6
FORMIRANJE SNOPA – BEAMFORMING	6
ZADATAK: LOKALIZACIJA CILINDRA POMOĆU METODE BEAMFORMING.....	7
ZADATAK: ILUSTRACIJA UTICAJA UČESTANOSTI.....	9
ZADATAK: REKONSTRUKCIJA NEKONVEKSNIH OBJEKATA	11
ZAPREMINSKA TEOREMA EKVIValENCije	12
DIJADIČKA GRINOVA MATRICA	15
NUMERIČKO ODREĐIVANJE DIJADIČKE GRINOVE MATRICE	16
ZADATAK: PRORAČUN DIJADIČKE GRINOVE MATRICE U PROGRAMU WIPL-D	17
OSOBINE DIJADIČKE GRINOVE FUNKCIJE.....	18
ZADATAK: NUMERIČKA PROVERA ZAPREMINSKE TEOREME EKVIValENCije	19
APROKSIMATIVAN IZRAZ ZA RASEJANO POLJE SLABIH RASEJAČA	22
BEAMFORMING U PROIZVOLJNOJ SREDINI	23
ZADATAK: LOKALIZACIJA ZAKOPANOG OBJEKTA	25
SINGULARNA DEKOMPOZICIJA (SVD)	27
ORTOGONALNI VEKTORI	27
UNITARNA MATRICA.....	27
SINGULARNA DEKOMPOZICIJA	27
PRIMENE SINGULARNE DEKOMPOZICIJE.....	28
ZADATAK: PRIMENA SINGULARNE DEKOMPOZICIJE	31
NEKE OSOBINE SINGULARNE DEKOMPOZICIJE	33
DEKOMPOZICIJA VEKTORA.....	33
REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA	35
TEHNIKE LOKALIZACIJE ZASNOVANE NA SINGULARNOJ DEKOMPOZICIJI	37
MUSIC ALGORITAM	37
ZADATAK: PRIMENA MUSIC ALGORITMA U SLOBODNOM PROSTORU	40
ZADATAK: ODREĐIVANJE IMPULSNOG ODZIVA SISTEMA	41
ZADATAK: LOKALIZACIJA TELA IZA ZIDA PRIMENOM MUSIC ALGORITMA	42
SKRAĆENA (TRUNCATED) SVD METODA	43
ZADATAK: PRIMENA TSVD METODE	44
TIHOV REGULARIZACIJA	46
LINEAR SAMPLING	47
ZADATAK: PRIMENA METODE LINEAR SAMPLING	49
KVANTITATIVNE TEHNIKE REKONSTRUKCIJE	51
BORNOVA INVERZIJA	51
ZADATAK: PRIMENA BORNOVE INVERZIJE ZA PROCENU SASTAVA TELA	54
ITERATIVNE BORNOVE METODE	57
ZADATAK: PRIMENA DBIMA ZA ODREĐIVANJE SASTAVA HOMOGENOG OBJEKTA	58
LITERATURA	60

Uvod

U mnogim situacijama, postoji potreba za ispitivanjem vizuelno nedostupnih objekata, poput detekcije defekata u građevini, pronalaženja zakopanih objekata, medicinske dijagnostike i sl. U zavisnosti od primene, zanima nas lokacija traženog objekta, njegov oblik i, eventualno, sastav. Sama priroda objekata je raznorodna: u građevini to može biti pukotina u zidu, u podzemnim istraživanjima – arheološko nalazište ili sakrivena mina, u radarskim problemima – pokretna meta, u medicini – izmenjeno tkivo. Svim ovim aplikacijama, zajednička je primena elektromagnetskog zračenja radi dobijanja slike. U najvećem broju slučajeva, radi se o *aktivnom* istraživanju gde se predajnim antenama zračenje usmerava ka ispitivanom objektu, a potom prijemnim antenama meri elektromagnetsko polje izmenjeno zbog prisustva objekta. Ova perturbacija polja sadrži takozvani "otisak" objekta. Obradom izmerenih podataka, u slučaju da postoji dovoljna količina informacija, dobija se rekonstrukcija objekta. U nekim situacijama antene prikupljaju elektromagnetsko polje koje sam objekat prirodno zrači. U tom slučaju, radi se o takozvanom *pasivnom* ispitivanju. Primeri su mapiranje ledenih pokrivača i određivanje sastava tla.

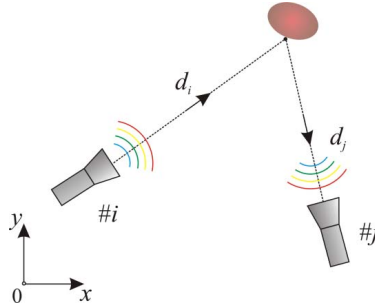
Radi formiranja slike objekta, koriste se različiti delovi elektromagnetskog spektra. Izbor učestanosti zavisi od konkretne primene i najčešće je rezultat kompromisa između potrebnog nivoa detalja i dubine prodiranja elektromagnetskih talasa. Rezolucija slike je obrnuto proporcionalna talasnoj dužini. Međutim, sa porastom učestanosti raste apsorpcija elektromagnetskih talasa, sto onemogućava pristup dubljim delovima objekta. U velikom broju primena, upravo mikrotalasni deo spektra, koji obuhvata opseg učestanosti od 300 MHz do 300 GHz, predstavlja optimalan izbor. Dodatna pogodnost mikrotalasnih sistema je dostupnost komponenti, kao i njihova relativna bezbednost kada je ljudsko zdravlje u pitanju.

Predmet ovog kursa je dobijanje slike na osnovu aktivnih merenja u mikrotalasnom području. Najpre, bavićemo se algoritmima za lokalizaciju i određivanje oblika objekta (*beamforming*, *linear sampling*, MUSIC). U drugom delu kursa, fokus je na algoritmima koji, pored oblika, omogućavaju i određivanje sastava tela (Bornova inverzija, iterativni Bornov algoritam, deformisani Bornov algoritam). Pored teorijske osnove pomenutih metoda, materijal sadrži i praktične primere za vežbu u urađene u programskom paketu Matlab. Takodje, data su i uputstva za formiranje virtuelnih eksperimenata u programu za rešavanje elektromagnetskih problema WIPL-D Pro.

Osnovi lokalizacije

Formiranje snopa – beamforming

Posmatramo sistem koji se sastoji od antenskog niza i objekta koji se ispituje. Antenski niz se sastoji od M elemenata proizvoljno raspoređenih u prostoru. Na slici 1.1 prikazane su izdvojene i -ta antena, koja radi kao predajnik, i j -ta antena koja radi kao prijemnik. Udaljenosti predajne i prijemne antene od objekta su d_i i d_j , respektivno.



Slika 1.1. Primer mernog sistema i ispitivanog objekta.

Pretpostavimo da se objekat nalazi u dalekom polju antena, odnosno $d_i, d_j \gg \lambda$, gde je λ talasna dužina u datoj sredini. U slučaju linearne sredine bez gubitaka, rasejani signal od objekta je zakašnjena i oslabljena replika poslatog signala

$$s_{ij}(t) \approx A_{ij} h(t - \tau_{ij}), \quad \tau_{ij} = (d_i + d_j)/c, \quad (1.1)$$

gde je $h(t)$ talasni oblik originalnog signala, τ_{ij} kašnjenje, A_{ij} slabljenje signala usled prostiranja i c brzina prostiranja elektromagnetskog talasa u posmatranoj sredini. U zavisnosti od pozicije primopredajnog para, kašnjenja i slabljenja se razlikuju. Radi konstruktivnog sabiranja primljenih signala, potrebno je da se primljeni talasni oblici pomere u vremenu tako da se poništi efekat različitog kašnjenja,

$$g(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M s_{ij}(t + \tau_{ij}). \quad (1.2)$$

Međutim, kako je pozicija objekta nepoznata, nepoznata su i kašnjenja τ_{ij} . Zbog toga se objekat pretražuje u diskretnom skupu tačaka, u odabranom delu prostora, kao što je ilustrovano na slici 1.2. Za svaku tačku u mreži, formira se suma

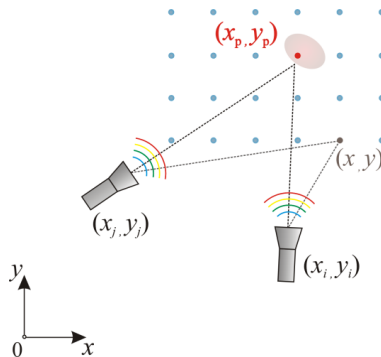
$$g(t; x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M s_{ij}(t + T_{ij}(x, y)), \quad (1.3)$$

$$T_{ij}(x, y) = \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) / c, \quad (1.4)$$

gde su (x_i, y_i) Dekartove koordinate antena, $i = 1, \dots, M$, i (x, y) Dekartove koordinate posmatrane tačke na mreži. U primeru ilustrovanom na slici 1.2, pozicija traženog objekta je definisana koordinatama (x_p, y_p) . U frekvencijskom domenu (1.3) postaje

$$G(f; x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M A_{ij} H(f) e^{-j\omega\tau_{ij}} e^{j\omega T_{ij}(x, y)}, \quad (1.5)$$

gde je $H(f)$ Furijeova transformacija funkcije $h(t)$. U slučaju kada je $x = x_p$ i $y = y_p$, svi sabirci u sumi imaju istu fazu jer je $T_{ij}(x_p, y_p) = \tau_{ij}$. Zbog toga, (1.5) ima maksimalnu vrednost upravo na mestu gde se objekat stvarno nalazi. U suprotnom, dolazi do poništavanja sabiraka u sumi zbog proizvoljnih faza eksponencijalnih članova, koji se brzo menjaju. Na osnovu prethodnih razmatranja, zaključujemo da se lokacija objekta, kao i njegov približni oblik, mogu dobiti crtanjem modula funkcije (1.5).



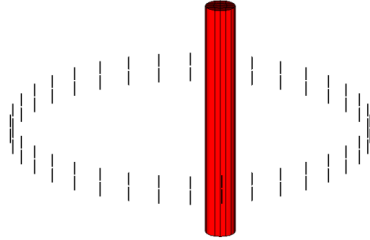
Slika 1.2. Mreža tačaka u kojoj se vrši pretraživanje objekta.

Zadatak: Lokalizacija cilindra pomoću metode beamforming

Određiti položaj nepoznatog objekta pomoću metode *beamforming*. Najpre, generisati simulaciju merenja u programu WIPL-D. Eksperimentalna postavka se sastoji od metalnog cilindra, koji predstavlja nepoznati objekat, i kružnog niza dipola, kao što je prikazano na slici 1.3. Prilikom izrade modela, koristiti sledeće podatke

- Niz čini $M = 36$ polutalasnih dipola.
- Radna učestanost je $f = 3$ GHz.
- Poluprečnik niza je $R = 3\lambda$.
- Poluprečnik cilindra je $b = 2,5$ cm.
- Osa cilindra prolazi kroz tačku sa koordinatama (5 cm, 5 cm).

Rezultati simulacije u vidu matricnih Y , Z i S parametara nalaze se u fajlu sa ekstenzijom ad1. Radi izdvajanja signala koji je, približno, proporcionalan polju rasejanom od objekta, napraviti još jedan model koji se sastoji samo od antenskog niza. Smatrati da je rasejano polje proporcionalno razlici impedansnih parametara dobijenih sa i bez objekta.



Slika 1.3. WIPL model.

U programskom jeziku Matlab napisati program za lokalizaciju objekta primenom algoritma *beamforming*. Proces se sastoji iz sledećih koraka:

- Ispitivani prostor $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ diskretizovati u vidu kvadratne mreže od $N \times N$ tačaka. Usvojiti: $x_{\max} = -x_{\min} = 0.2$ m, $y_{\max} = -y_{\min} = 0.2$ m, $N = 30$.
- Definisati promenljive koje predstavljaju koordinate čvorova mreže. Jedna mogućnost je primena Matlabove funkcije *linspace*, tj. $x_p = \text{linspace}(x_{\min}, x_{\max}, N)$, $y_p = \text{linspace}(y_{\min}, y_{\max}, N)$. U tom slučaju, koordinate čvora sa indeksima k, l su $x_p(k)$, $y_p(l)$.
- Definisati promenljive koje predstavljaju koordinate elemenata antenskog niza. U primeru kružnog antenskog niza $x_a(i) = R \cos(2\pi(i-1)/M)$, $y_a(i) = R \sin(2\pi(i-1)/M)$, $i = 1, \dots, M$.
- Izračunati vrednosti piksela slike kao

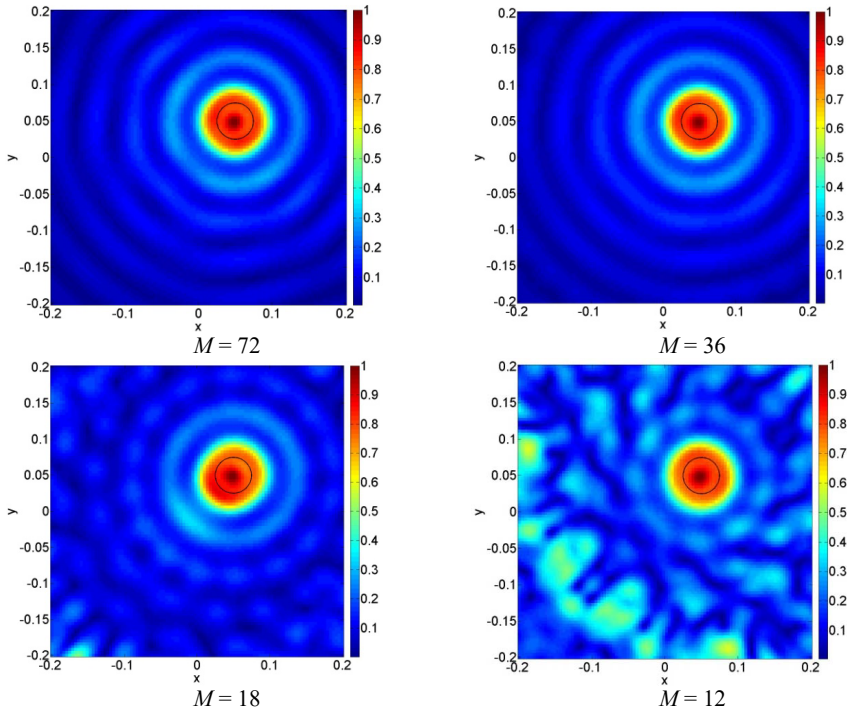
$$I(k, l) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta Z_{ij} e^{+j\omega T_{ij}(k, l)/c},$$

$$T_{ij}(k, l) = \sqrt{(x_a(i) - x_p(k))^2 + (y_a(i) - y_p(l))^2} + \sqrt{(x_a(j) - x_p(k))^2 + (y_a(j) - y_p(l))^2},$$

gde je ΔZ_{ij} razlika međusobne impedanse između i -tog i j -tog elementa niza, sa i bez objekta.

- Nacrtati sliku pomoću Matlabove funkcije *image*

```
I=abs(I);
I=I/max(max(I));
image(xp,yp,I,'CDataMapping','scaled');
set(gca,'YDir','normal');
ctb=colormap('jet');
colormap(ctb);
colorbar('location','EastOutside');
set(gca,'fontsize',30,'TickDir','in');
daspect([1,1,1]);
```

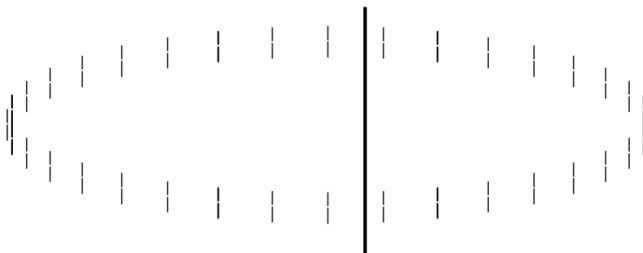
Slika 1.4. Rekonstrukcija cilindra primenom metode beamforming, dobijena za različit broj elemenata antenskog niza, M .

Na slici 1.4 su prikazane rekonstrukcije nepoznatog objekta dobijene za različit broj antena u nizu. Na osnovu rezultata, zaključujemo da povećanje broja dipola samo donekle popravlja kvalitet procene. Optimalan broj elemenata antena u nizu zavisi od veličine ispitivanog prostora i iznosi, približno, $M_{\text{opt}} = 2O/\lambda + 1$, gde je O obim ispitivanog prostora. Ovaj broj određen je stepenom slobode elektromagnetskog polja, čije proučavanje prevazilazi granice kursa. U posmatranom primeru, taj broj je $M_{\text{opt}} \approx 33$. Daljim povećavanjem broja antena, količina informacija ostaje ista, a sistem se nepotrebno usložnjava.

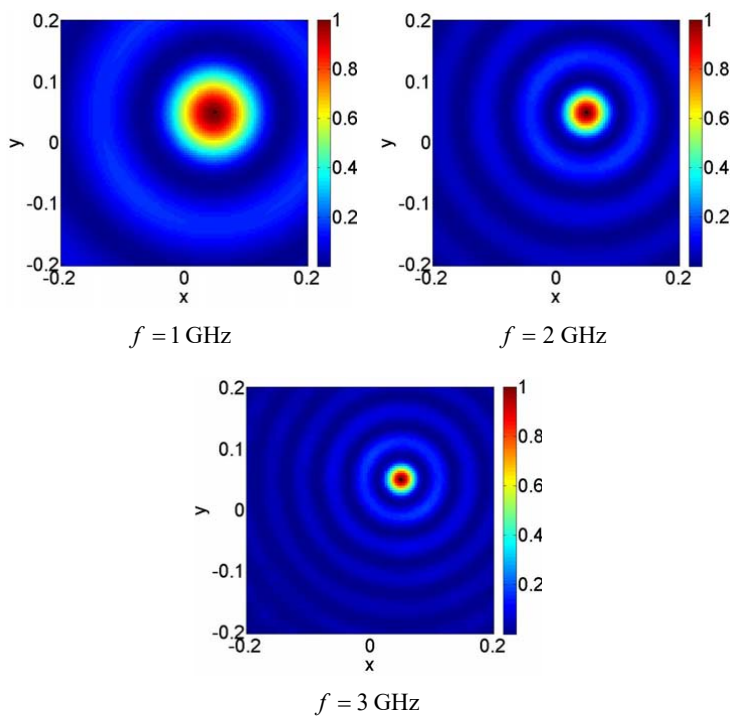
Zadatak: Ilustracija uticaja učestanosti

U sledećem primeru posmatraćemo uticaj učestanosti na rezoluciju sistema. Rezoluciju, odnosno najmanji mogući detalj koji se jasno razaznaje na slici, možemo približno da odredimo na osnovu rezultata rekonstrukcije tačkastih rasejača u trodimenzionom prostoru, odnosno beskonačno dugačkih i tankih cilindričnih tela u dvodimenzionom prostoru. U tu svrhu, posmatramo konfiguraciju prikazanu na slici 1.5. Detalji modela su isti kao u prethodnom primeru, osim što je sada poluprečnik cilindra $b = 2 \text{ mm}$, a poluprečnik niza $R = 0.5 \text{ m}$. Na slici 1.6, prikazani su rezultati proračunati na učestanostima $f = 1, 2, 3 \text{ GHz}$. Stvaran presek cilindra označen je crnom linijom. Sa slika se uočava kako se sa porastom

učestanosti povećava prostorna rezolucija slike, a samim tim poboljšava sposobnost sistema da razlikuje dva bliska objekta.

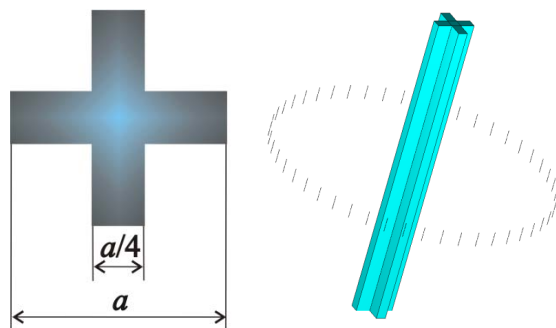


Slika 1.5. Model tankog cilindra u prisustvu kružnog antenskog niza.



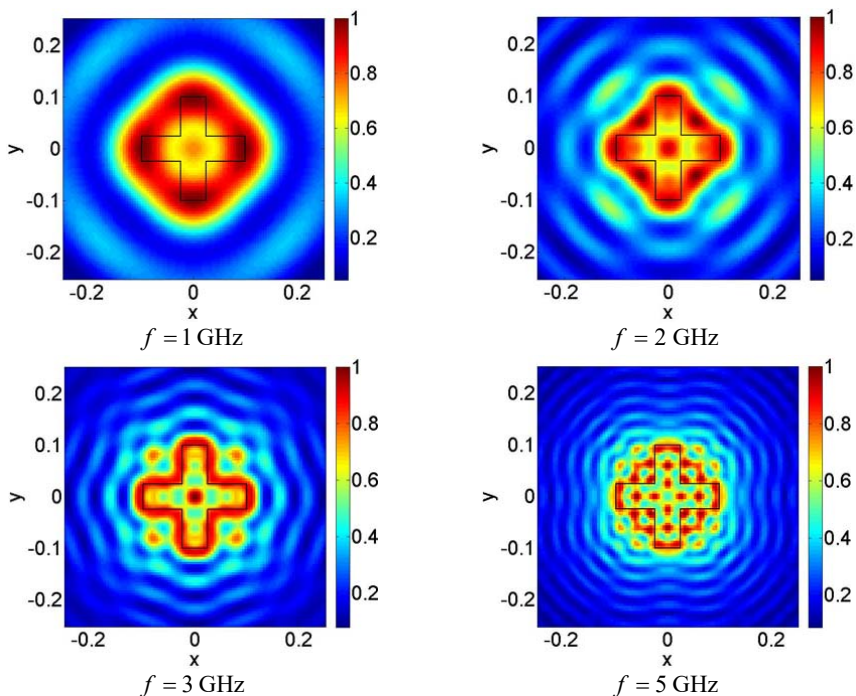
Slika 1.6. Rekonstrukcija tankog cilindra primenom metode beamforming, dobijena na različitim učestanostima.

Zadatak: Rekonstrukcija nekonvexnih objekata



Slika 1.7. Konfiguracija sistema sa cilindrom složenog poprečnog preseka.

U ovom zadatku posmatramo rekonstrukciju metalnog, nekonvexnog cilindričnog tela, prikazanog na slici 1.7, pri čemu je $a = 0.2$ m, $R = 0.7$ m, $M = 72$. Na slici 1.8, prikazani su rezultati dobijeni na različitim učestanostima, $f = 1, 2, 3, 5$ GHz. Sa porastom učestanosti, rekonstrukcija objekta se poboljšava. Međutim, zbog višestrukih refleksija na kracima, metoda pogrešno rekonstruiše nekonvexne delove konture tela.

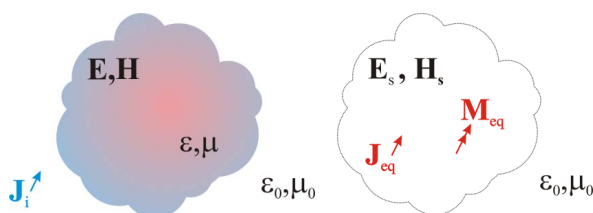


Slika 1.8. Rekonstrukcija nekonvexnog cilindra dobijena primenom metode beamforming na različitim učestanostima.

Teorijski osnovi inverznog rasejanja

Zapreminska teorema ekvivalencije

Vrlo retko se objekti, čiju poziciju ili sliku želimo da odredimo, nalaze u slobodnom prostoru. Obično su u elektromagnetski složenim sredinama, poput zatvorenih prostorija, ulica, nehomogenog tla, složenih tkiva itd. U svim ovim situacijama, primljeni signal ne može da se predstavi jednostavno pomoću zakašnjene replike poslatog signala, kao što je bio slučaj u vazduhu. Naprotiv, primljeni signali su izmenjeni višestrukim refleksijama elektromagnetskih talasa od prepreka, poput zidova u prostorijama, granica različitih slojeva u zemljištu ili tkiva u ljudskom telu. Zbog toga je od interesa pronaći opšti fizički model koji povezuje merenja i karakteristike sredine u kojoj se elektromagnetsko polje prostire. Prvi korak u razvoju tog modela je zapreminska teorema ekvivalencije.



Slika 2.1. Zapreminska teorema ekvivalencije u vakuumu. (a) Dielektrično telo u prisustvu pobudnih struja i (b) ekvivalentne električne i magnetske struje.

Pretpostavimo, najpre, da u vakuumu postoje samo pobudne struje \mathbf{J}_i koje stvaraju elektromagnetsko polje $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$. Ovo polje i izvori zadovoljavaju Maksvelove jednačine

$$\text{rot } \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_0, \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_i + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}_0. \quad (2.2)$$

Ukoliko se u vakuumu nalazi i telo čije se elektromagnetske osobine razlikuju od osobina vazduha, pri istoj pobudi, u prostoru se uspostavlja novo polje (\mathbf{E}, \mathbf{H}) . Ovo polje, takođe, zadovoljava Maksvelove jednačine

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_i + j\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad (2.4)$$

gde su ϵ i μ permitivnosti i permeabilnost tela, respektivno. Primer dielektričnog tela, u prisustvu izvora polja, ilustrovan je na slici 2.1a.

Oduzimanjem (2.1) i (2.2) od (2.3) i (2.4), dobijamo

$$\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) = -j\omega\mu\mathbf{H} + j\omega\mu_0\mathbf{H}_0, \quad (2.5)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) = j\omega\varepsilon\mathbf{E} - j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_0. \quad (2.6)$$

Definišimo rasejano polje kao razliku ukupnog polja i polja bez prisustva dielektričnog tela,

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0. \quad (2.8)$$

Jednačine (2.5) i (2.6) se ne menjaju ako ih napišemo u obliku

$$\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) = -j\omega\mu\mathbf{H} + j\omega\mu_0\mathbf{H}_0 - \underbrace{j\omega\mu_0\mathbf{H} + j\omega\mu_0\mathbf{H}}_0, \quad (2.9)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) = j\omega\varepsilon\mathbf{E} - j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_0 + \underbrace{j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} - j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}}_0. \quad (2.10)$$

Odnosno,

$$\text{rot} \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s - j\omega(\mu - \mu_0)\mathbf{H}, \quad (2.11)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_s + j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Definišimo zapremnske gustine ekvivalentnih električnih i magnetskih struja

$$\mathbf{J}_{\text{eq}} = j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{M}_{\text{eq}} = j\omega(\mu - \mu_0)\mathbf{H}. \quad (2.14)$$

Ove struje postoje samo u oblasti gde je $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ i $\mu \neq \mu_0$, odnosno samo u dielektričnom telu.

Kada uvrstimo izraze za ekvivalentne struje u (2.11) i (2.12), dobijamo

$$\text{rot} \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s - \mathbf{M}_{\text{eq}}, \quad (2.15)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_s + \mathbf{J}_{\text{eq}}. \quad (2.16)$$

Jednačine za rasejano polje (2.15) i (2.16) su formalno iste kao za polje koje stvaraju ekvivalentne električne (\mathbf{J}_{eq}) i magnetske struje (\mathbf{M}_{eq}) koje se nalaze u vakuumu, na mestu dielektričnog tela. Teorema ekvivalencije ilustrovana je na slici 2.1b.

Navedena teorema ekvivalencije je izvedena za slučaj kada se objekat (rasejač) nalazi u vakuumu. Međutim, na isti način može da se formuliše i opšta teorema ekvivalencije, koja važi u proizvoljnoj linearnoj sredini. Na slici 2.2a, prikazan je nepoznati objekat načinjen od

dielektrika permitivnosti ε i permeabilnosti μ . Objekat se nalazi u poznatom, u opštem slučaju nehomogenom, dielektriku parametara ε_b i μ_b . U prostoru postoje izvori polja u vidu pobudnih struja \mathbf{J}_i . Polje rasejano od objekta sada definišemo kao

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_b, \quad (2.17)$$

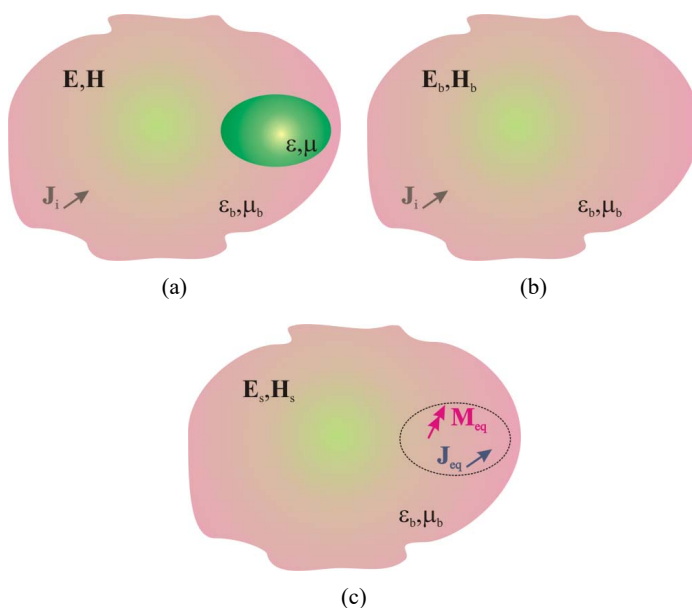
$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_b, \quad (2.18)$$

gde su \mathbf{E}_b i \mathbf{H}_b vektori incidentnog električnog i magnetskog polja, respektivno, uspostavljeni u sredini parametara ε_b i μ_b kada je objekat uklonjen (slika 2.2b). Rasejano polje se može pripisati ekvivalentnim električnim i magnetskim strujama koje su sada

$$\mathbf{J}_{eq} = j\omega(\varepsilon - \varepsilon_b)\mathbf{E}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M}_{eq} = j\omega(\mu - \mu_b)\mathbf{H} \quad (2.20)$$

i one postoje samo u oblastima gde je $\varepsilon \neq \varepsilon_b$ i $\mu \neq \mu_b$ (slika 2.2c).



Slika 2.2. Ilustracija teoreme ekvivalencije u proizvoljnoj sredini. (a) Ukupno polje, (b) incidentno polje i (c) rasejano polje i ekvivalentne struje.

Dijadička Grinova matrica

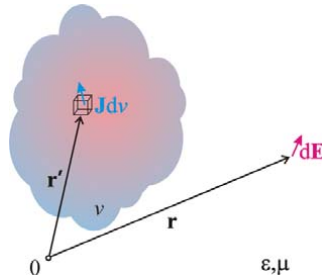
Elektromagnetsko polje, koje u linearnoj sredini parametara ϵ i μ , stvaraju električne struje zapreminske gustine \mathbf{J} , dobija se rešavanjem talasne jednačine

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \beta^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (2.21)$$

gde je $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ fazni koeficijent. Kada su izvori polja elementarni strujni izvori, talasna jednačina može da se napiše u obliku

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \beta^2 \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\mu \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.22)$$

gde je $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dijadička Grinova funkcija, $\bar{\mathbf{I}}$ je jedinična 3×3 matrica i $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ je prostorna delta funkcija. (Dijada je 3×3 matrica koja transformiše jedan vektor u drugi vektor.)



Slika 2.3. Uz definiciju Grinove funkcije.

U razvijenom obliku dijadička Grinova matrica je

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} = [\mathbf{g}_x \quad \mathbf{g}_y \quad \mathbf{g}_z], \quad (2.23)$$

gde vektori \mathbf{g}_x , \mathbf{g}_y i \mathbf{g}_z predstavljaju odzive sistema koje proizvode jedinični strujni izvori u pravcu x , y , i z -ose, respektivno,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g}_x - \beta^2 \mathbf{g}_x = j\omega\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_x, \quad (2.24a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g}_y - \beta^2 \mathbf{g}_y = j\omega\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_y, \quad (2.24b)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{g}_z - \beta^2 \mathbf{g}_z = j\omega\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{i}_z. \quad (2.24c)$$

Odatle, polje koje pobuđuje elementarni strujni izvor $\mathbf{J}dV$ (slika 2.3) je

$$\begin{bmatrix} dE_x \\ dE_y \\ dE_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} dV, \quad (2.25)$$

odnosno

$$d\mathbf{E} = \overline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{J} dV, \quad d\mathbf{E} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y + E_z \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{J} = J_x \mathbf{i}_x + J_y \mathbf{i}_y + J_z \mathbf{i}_z. \quad (2.26)$$

Primenom principa superpozicije, električno polje koje potiče od proizvoljne raspodele struja je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV. \quad (2.27)$$

U opštem slučaju, elementi Grinove dijadičke matrice ne mogu da se odrede analitički. U tu svrhu, najčešće se koristi elektromagnetski softver.

Numeričko određivanje dijadičke Grinove matrice

Posmatramo linijski strujni element male dužine h ($h \ll \lambda$) sa strujom I (Hercov dipol). U tom slučaju (2.26) postaje

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}I, \quad |\mathbf{h}| = h, \quad (2.28)$$

gde je vektor \mathbf{h} orijentisan kao i struja. Ukoliko je strujni element postavljen u pravcu x -ose, sledi

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I, \quad (2.29)$$

$$E_x = G_{xx}hI \Rightarrow G_{xx} = \frac{E_x}{hI},$$

$$E_y = G_{yx}hI \Rightarrow G_{yx} = \frac{E_y}{hI}, \quad (2.30)$$

$$E_z = G_{zx}hI \Rightarrow G_{zx} = \frac{E_z}{hI}.$$

Slično, postavljanjem strujnog elementa paralelno y -osi, dobijamo G_{xy} , G_{yy} i G_{zy} . Konačno, kada se orijentacija strujnog elementa poklapa sa z -osom, određujemo G_{xz} , G_{yz} i G_{zz} . U

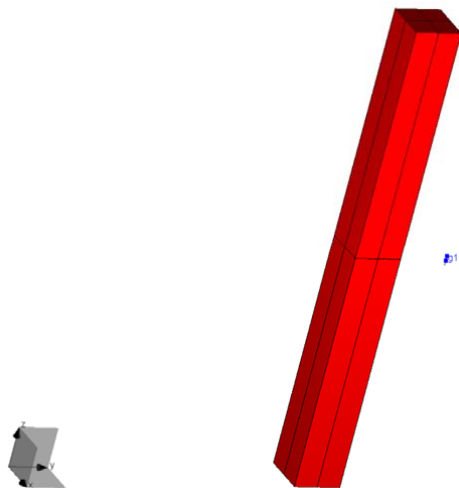
slučaju kratkog neopterećenog dipola, formule (2.28-2.30) ostaju iste, s tim što h predstavlja dužinu kraka dipola. Za razliku od Hercovog dipola, kratak neopterećeni dipol ima trougaonu raspodelu struje. Pod pretpostavkom da se dijadička Grinova matrica ne menja značajno duž ose dipola, (2.27) postaje

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2I_0 \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{i} \int_0^h \left(1 - \frac{l}{h}\right) dl = I_0 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}, \quad (2.31)$$

gde je I_0 struja na priključku dipola, a \mathbf{i} ort dipola u Dekartovom koordinatnom sistemu. Postavljanjem dipola paralelno koordinatnim osama, dobijaju se svi elementi Grinove dijadičke matrice kao i u slučaju Hercovog dipola.

Zadatak: Proračun dijadičke Grinove matrice u programu WIPL-D

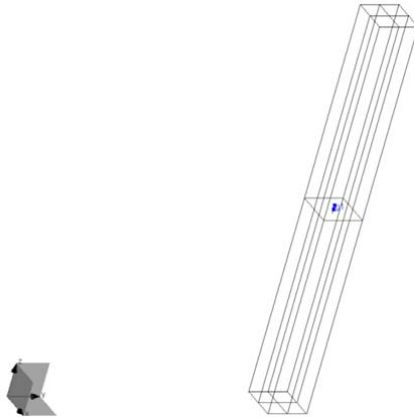
Radi određivanja elemenata Grinove matrice, napraviti dielektrično telo u obliku kvadra relativne permitivnosti $\epsilon_r = 2$, kao što je prikazano na slici 2.4. Osnova tela je kvadrat stranice $a = 2$ cm, a visina $H = 10$ cm. Radna učestanost je $f = 2$ GHz. Radi određivanja elementa $G_{zz}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ u tački sa koordinatama $\mathbf{r}_1(x_1 = 1$ cm, $y_1 = 3$ cm, $z_1 = 0$ cm) postaviti dipol dužine kraka $h = 2$ mm paralelno z -osi. Odrediti električno polje primenom opcije NEAR FIELD u tački sa koordinatama $\mathbf{r}_2(x_2 = 0$ cm, $y_2 = 0$ cm, $z_2 = 0$ cm).



Slika 2.4. WIPL-D model za određivanje Grinove funkcije.

U programu WIPL-D, žice se pobuđuju naponskim generatorom $U = 1 \text{ V}$. Odatle je struja na priključku dipola $I = U/Z_{11}$, gde je Z_{11} impedansa dipola. Traženi element Grinove dijadičke matrice je $G_{zz} = \frac{E_z Z_{11}}{h}$.

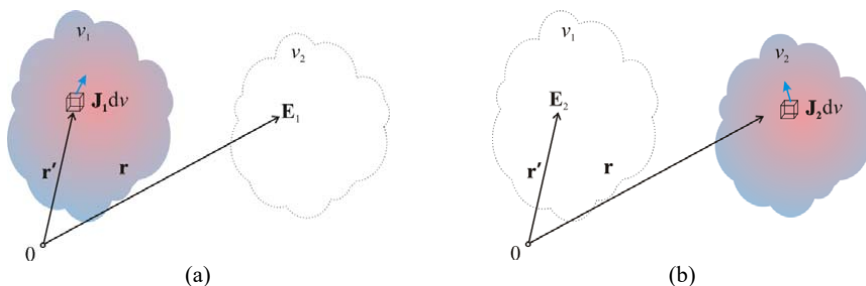
Posmatramo potom obrnutu situaciju, kao što je ilustrovano na slici 2.5. Dipol se nalazi u dielektriku u tački $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, a polje se računa u vakuumu u tački $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$. Odrediti element $G_{zz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Kakva je veza između $G_{zz}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ i $G_{zz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$?



Slika 2.5. WIPL-D model za proveru osobina Grinove funkcije.

Osobine dijadičke Grinove funkcije

Na osnovu teoreme reciprociteta može se pokazati da važi $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})^T$, gde T označava transponovanje matrice. Teorema reciprociteta ima veliki značaj u elektrotehnici, posebno u antenskim merenjima. Ovde je samo navodimo bez dokaza.



Slika 2.6. Ilustracija teoreme reciprociteta.

Neka u domenu v_1 postoje zapreminske struje gustine \mathbf{J}_1 koje stvaraju polje \mathbf{E}_1 , kao što je prikazano na slici 2.6a. Slično, neka u domenu v_2 sa slike 2.6b postoje zapreminske struje gustine \mathbf{J}_2 koje stvaraju polje \mathbf{E}_2 . Može se pokazati da važi

$$\int_{V_1} \mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') dV_1 = \int_{V_2} \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) dV_2. \quad (2.32)$$

Pomoću dijadičkih Grinovih matrica, levu i desnu stranu (2.32) možemo da napišemo u obliku

$$\int_{V_1} \mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') dV_1 = \int_{V_1} \mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') dV_1 \cdot \int_{V_2} \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) dV_2 = \int_{V_1} \int_{V_2} \mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) dV_1 dV_2, \quad (2.33)$$

$$\int_{V_2} \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) dV_2 = \int_{V_2} \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) dV_2 \cdot \int_{V_1} \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dV_1 = \int_{V_1} \int_{V_2} \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dV_1 dV_2. \quad (2.34)$$

S obzirom na to da je $\mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r})$ skalarna veličina, njenim transponovanjem se ništa ne menja,

$$\mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = (\mathbf{J}_1^T(\mathbf{r}') \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}))^T = \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}'). \quad (2.35)$$

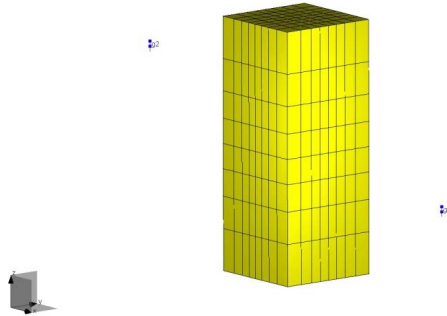
S druge strane, na osnovu (2.32)-(2.34)

$$\mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_2^T(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}'), \quad (2.36)$$

odakle je

$$\overline{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.37)$$

Zadatak: Numerička provera zapreminske teoreme ekvivalencije



Slika 2.7. Dielektrično telo u prisustvu dve antene.

Zapreminsku teoremu ekvivalencije proverićemo na primeru rasejanog polja koje potiče od dielektričnog tela prikazanog na slici 2.7. Incidentno polje potiče of električki kratkog dipola koji se nalazi u tački sa koordinatama (x_1, y_1, z_1) . Prijemni dipol je identičan i nalazi se u tački sa koordinatama (x_2, y_2, z_2) . Obe antene su postavljene u pravcu z -ose.

Na osnovu zapreminske teoreme ekvivalencije, rasejano polje u tački \mathbf{r} izvan tela potiče od ekvivalentnih struja

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') dv = j\omega\epsilon_0 \int_V (\epsilon_r - 1) \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv, \quad (2.38)$$

gde je $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ ukupno polje u dielektriku u tački \mathbf{r}' , a $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dijadička Grinova funkcija u vazduhu. S obzirom na to da je predajna antena z -polarizovana, pretpostavljamo da je E_z dominantna komponenta električnog polja. Rasejano električno polje je približno

$$E_{s,z}(\mathbf{r}) \approx j\omega\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \int_V G_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_z(\mathbf{r}') dv. \quad (2.39)$$

Integral (2.39) se određuje numerički. U tu svrhu, unutrašnjost tela treba podeliti na uniformnu mrežu voksela (najmanji deo 3D prostora), gde su centri voksela definisani Dekartovim koordinatama $\mathbf{r}_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$, $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, $k = 1, \dots, N_z$. Približna vrednost (2.39) na mestu predajnika je

$$E_{s,z}(\mathbf{r}_2) \approx j\omega\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} G_{zz}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{ijk}) E(\mathbf{r}_{ijk}) \Delta_x \Delta_y \Delta_z, \quad (2.40)$$

gde su $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ dimenzije voksela po x, y i z osi, respektivno. Na osnovu teoreme reciprociteta (2.40) je

$$E_{s,z}(\mathbf{r}_2) \approx j\omega\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} G_{zz}(\mathbf{r}_{ijk}, \mathbf{r}_2) E(\mathbf{r}_{ijk}) \Delta_x \Delta_y \Delta_z, \quad (2.41)$$

jer je $G_{zz}(\mathbf{r}_{ijk}, \mathbf{r}_2) = G_{zz}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{ijk})$.

Implementacija algoritma se sastoji iz sledećih koraka

- U programu WIPL-D napraviti model koji se sastoji od dielektričnog tela i dva dipola. Predajni i prijemni dipoli nalaze se u tačkama sa koordinatama $x_1 \in \{2 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 10 \text{ cm}\}$, $y_1 = 2 \text{ cm}$, $z_1 = -H/4$, $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, $z_2 = 3H/4$, respektivno. Dužina kraka dipola je $h = 7.5 \text{ mm}$, a poluprečnik žice dipola je dvadeset puta manji od dužine kraka. Radna učestanost je $f = 2 \text{ GHz}$. Dielektrično telo je u obliku kvadra koji je postavljen centralno u odnosu na koordinatni sistem. Visina tela je $H = 5 \text{ cm}$, a osnova je u obliku kvadrata, stranice $a = 2 \text{ cm}$. Relativna permitivnosti dielektrika je $\epsilon_r = 1.5$.
- Odrediti električno polje u unutrašnjosti dielektričnog tela, $E_z(\mathbf{r}_{ijk})$, primenom opcije NEAR FIELD. U odgovarajućoj tabeli, definisati mrežu tačaka:

$$x_{\min} = -a/2, x_{\max} = a/2, N_x = 50,$$

$$y_{\min} = -a/2, y_{\max} = a/2, N_y = 50,$$

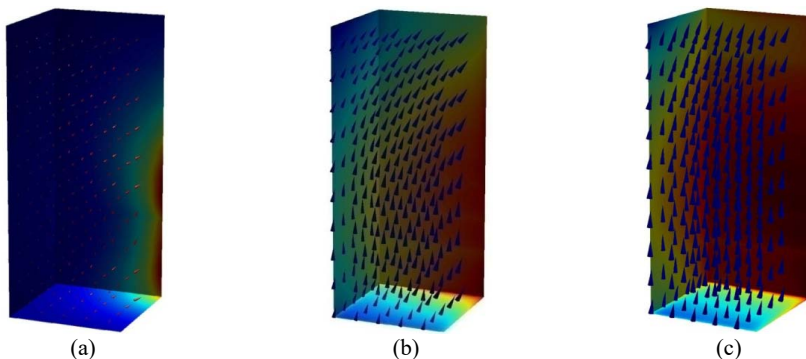
$$z_{\min} = -H/2, z_{\max} = H/2, N_z = 50.$$

- Napraviti drugi model koji se sastoji samo od predajne i prijemne antene u vazduhu (bez dielektričnog tela) radi određivanja Grinove funkcije. U prethodno definisanoj mreži tačaka, proračunati električno polje u vazduhu, $E_{z0}(\mathbf{r}_{ijk})$. Odrediti približno Grinovu funkciju $G_{zz}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{ijk}) \approx E_{z0}(\mathbf{r}_{ijk})Z_{22}/h$.
- Izračunati približno rasejano polje (2.41).
- Dobijeni rezultat uporediti sa rezultatom koji daje program WIPL-D,

$$E_{s,z}(\mathbf{r}_2) = E_z(\mathbf{r}_2) - E_{0,z}(\mathbf{r}_2) = -\left(\frac{Z_{12}}{Z_{11}h} - \frac{Z_{12}^0}{Z_{11}^0h} \right),$$

gde je E polje na mestu prijemne antene u prisustvu dielektrika, E_0 polje na mestu prijemne antene bez prisustva dielektrika, a Z_{12} i Z_{12}^0 su međusobne impedanse prijemne i predajne antene sa i bez dielektrika, respektivno. Kolike su razlike u rešenjima za tri različita položaja antene?

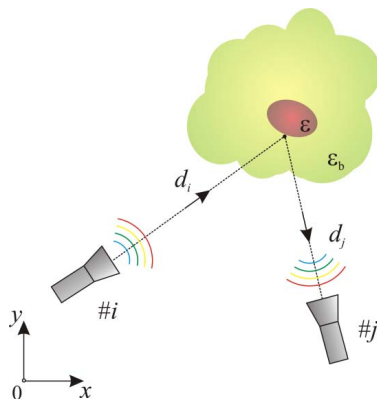
Očekivano je da se najbolje slaganje postiže u trećem slučaju, kada je predajna antena najudaljenija od objekta. U tom slučaju, incidentno polje je približno ravan talas, a polje i struje indukovane u telu imaju dominantnu z -komponentu, kao što smo i pretpostavili u rešenju. Na slici 2.8 prikazani su vektori indukovanih električnih struja za tri položaja antena dobijeni proračunom u programu WIPL-D. Raspodela struja potvrđuje prethodna razmatranja.



Slika 2.8. Ekvivalentne struje u dielektričnom telu kada je (a) $x_1 = 2$ cm, (b) $x_1 = 5$ cm i (c) $x_1 = 10$ cm.

Aproksimativan izraz za rasejano polje slabih rasejača

Posmatramo situaciju prikazanu na slici 2.9. U dielektričnoj sredini poznatih parametara (ϵ_b, μ_b) nalazi se električki mali objekat nepoznate permitivnosti i permeabilnosti (ϵ, μ) . Radi jednostavnosti, ograničavamo se na nemagnetske sredine. Stoga je $\mu_b = \mu = \mu_0$. U opštem slučaju, dielektrik je nehomogen, $\epsilon_b = \epsilon_b(\mathbf{r})$. Permitivnost ϵ_b se odnosi na celokupnu okolinu traženog objekta.



Slika 2.9. Lokalizacija objekta sakrivenog u neprovidnoj dielektričnoj sredini.

Pretpostavimo da je objekat osvetljen predajnom antenom koja se nalazi na mestu \mathbf{r}_i i da se polje meri prijemnom antenom na mestu \mathbf{r}_j . Na osnovu zapreminske teoreme ekvivalencije, rasejano polje može da se pripiše ekvivalentnim strujama koje postoje u sredini permitivnosti ϵ_b ,

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) = \int_V \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'; \epsilon_b) \cdot \mathbf{J}_{\text{eq}}(\mathbf{r}') dv = j\omega \int_V (\epsilon(\mathbf{r}') - \epsilon_b(\mathbf{r}')) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'; \epsilon_b) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) dv, \quad (2.42)$$

gde je $\mathbf{E}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i)$ ukupno polje na mestu \mathbf{r}' u prisustvu objekta, a $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'; \epsilon_b)$ je Grinova dijadička matrica u sredini ϵ_b (objekat je uklonjen). Pod pretpostavkom da je objekat električki mali, (2.42) daje približno

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) \approx j\omega(\epsilon - \epsilon_b(\mathbf{r}_i)) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i; \epsilon_b) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_i) \Delta V, \quad (2.43)$$

gde vektor \mathbf{r}_i definiše položaj objekta, a ΔV je njegova zapremina. U izrazu (2.43) nepoznati su kontrast $\epsilon - \epsilon_b$ i ukupno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_i)$. Radi uprošćenja ovog nelinearnog problema, primenjuje se Bornova aproksimacija, po kojoj je ukupno polje u slabom rasejaču približno isto kao i incidentno polje. Pod slabim rasejačem podrazumeva se električki malo telo čija je

permitivnost slična permitivnosti okoline. U tom slučaju, $\mathbf{E}(\mathbf{r}_t; \mathbf{r}_i) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_t; \mathbf{r}_i; \varepsilon_b)$, a (2.43) postaje

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) \approx j\omega(\varepsilon - \varepsilon_b(\mathbf{r}_t))\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_t; \varepsilon_b) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_t; \mathbf{r}_i; \varepsilon_b) \Delta V. \quad (2.44)$$

Ukoliko je predajnik kratak neopterećeni dipol, struje I i kraka \mathbf{h} , (2.44) postaje

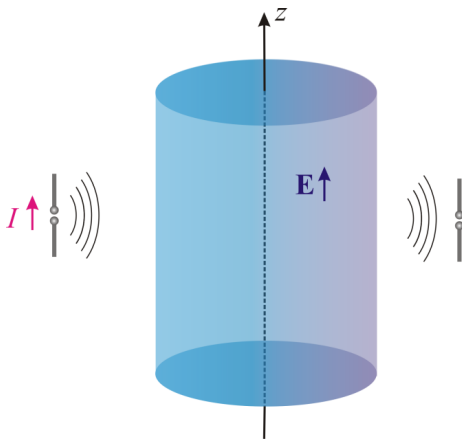
$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) \approx j\omega(\varepsilon - \varepsilon_b(\mathbf{r}_t))\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_t; \varepsilon_b) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_i; \varepsilon_b) \cdot \mathbf{h} I \Delta V. \quad (2.45)$$

Na osnovu teoreme reciprociteta dobijamo približan izraz za rasejano polje koje ima linearnu zavisnost od nepoznate permitivnosti tela.

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) \approx j\omega(\varepsilon - \varepsilon_b(\mathbf{r}_t))\overline{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) \cdot \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_i; \varepsilon_b) \cdot \mathbf{h} I \Delta V, \quad (2.46)$$

Beamforming u proizvoljnoj sredini

Posmatraćemo pojednostavljen slučaj u kome dijadička Grinova matrica može da se aproksimira skalarnom veličinom. Jedna takva situacija je ilustrovana na slici 2.10, gde su predajna i prijemna antena paralelne sa z -osom. Imajući u vidu da je objekat izdužen u pravcu z -ose, očekivano je da dominantna komponenta polja bude u tom pravcu.



Slika 2.10. Aproksimacija dvodimenzionog problema inverznog rasejanja.

U tom slučaju, z -komponenta rasejanog polja je približno

$$E_{s,z}(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) \approx j\omega\Delta\varepsilon\Delta V I h G_{zz}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_i; \varepsilon_b) = \tau G_{zz}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_i; \varepsilon_b), \quad (2.47)$$

gde je $\tau = j\omega\Delta\varepsilon\Delta V I h$.

Jednačina (2.47) je polazna osnova sa primenu algoritma *beamforming* u proizvoljnoj sredini, kao i nekih drugih algoritama za lokalizaciju o kojima će kasnije biti više reči.

Implementacija algoritma se sprovodi na sličan način kao i u vakuumu. Najpre, izdelimo prostor koji pretražujemo na uniformnu mrežu tačaka. U svakoj tački proračunavamo funkciju

$$I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M E_{s,z}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) (G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b))^* \quad (2.48)$$

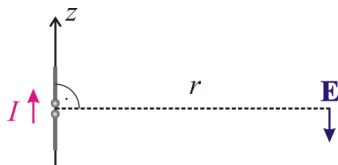
gde je $\mathbf{r}(x, y)$ proizvoljna tačka u mreži. Ukoliko se objekat stvarno nalazi u tački $\mathbf{r}(x, y)$, doći će do konstruktivnog sabiranja faza jer je

$$I(\mathbf{r}) \approx \tau \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) (G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b))^* = \tau \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b)|^2 |G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b)|^2 \quad (2.49)$$

U suprotnom, brzo promenljivi članovi se poništavaju, zbog čega će funkcija I imati jako malu vrednost u tim tačkama. Često se, umesto (2.48), koristi alternativni (normalizovani) izraz

$$I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M E_{s,z}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \frac{(G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b))^*}{|G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b) G_{zz}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \varepsilon_b)|} \quad (2.50)$$

kojim se kompenzuju razlike u slabljenju signala usled drugačijih putanja.



Slika 2.11. Uz polje zračenja kratkog dipola.

Vredi napomenuti da formulacija algoritma *beamforming* u vakuumu predstavlja specijalan slučaj izraza (2.50). Kao ilustraciju, posmatrajmo kratak neopterećen dipol, postavljen kao na slici 2.11. Polje u dalekoj zoni dipola je

$$\mathbf{E} = -j \frac{Z_0 I_0}{4\pi} \beta h \sin \theta \frac{\exp(-j\beta r)}{r} \mathbf{i}_\theta \quad (2.51)$$

gde je I_0 struja napajanja, a Z_0 talasna impedansa u slobodnom prostoru. U horizontalnoj ravni, vektor električnog polja ima samo z -komponentu koja iznosi

$$E_z = -j \frac{Z_0 I_0}{4\pi} \beta h \frac{\exp(-j\beta r)}{r} \quad (2.52)$$

odakle je Grinova funkcija

$$G_{zz} = \frac{E_z}{I_0 l} = -j \frac{Z_0 \beta e^{-j\beta r}}{4\pi r}, \quad G_{zz} = \frac{E_z}{I_0 h} = -j \frac{Z_0 \beta}{4\pi r} \exp(-j\beta r). \quad (2.53)$$

Zamenom (2.53) u (2.50), dobijamo

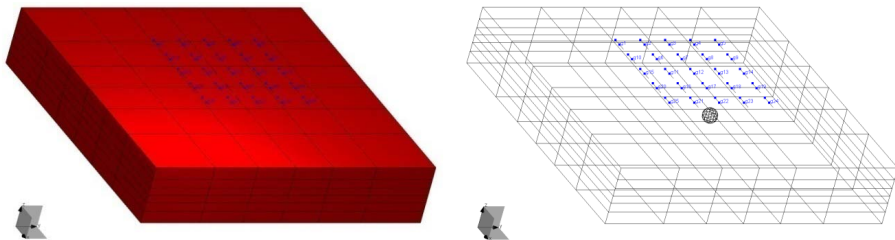
$$I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M E_s(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_i) e^{j\beta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)}, \quad (2.54)$$

odnosno

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M E_{s,z}(x_j, y_j; x_i, y_i) e^{j\beta(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} + \sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2})}. \quad (2.55)$$

Zadatak: Lokalizacija zakopanog objekta

U sledećem primeru ilustrovaćemo lokalizaciju zakopanih objekata pomoću metode *beamforming*. U programu WIPL-D, zemlju ćemo predstaviti kao dielektrično telo u obliku kvadra, stranica $a = b = 1\text{ m}$ i $c = 0.2\text{ m}$. Usvojimo da je permitivnost zemlje $\epsilon_r = 6 - 1j$. U zemlji se nalazi metalno telo, oblika sfere, poluprečnika $r = 2.5\text{ cm}$. Centar sfere je u tački sa koordinatama $x = z = 0$, $y = 10\text{ cm}$. Položaj objekta se utvrđuje pomoću niza kratkih dipola, koji rade na učestanosti $f = 1\text{ GHz}$. Dipoli su raspoređeni, kao na slici 2.12, u vidu planarnog niza od 5×5 elemenata. Dužina kraka dipola je $h = \lambda/10$. Ose dipola su u pravcu x -ose, a rastojanje između napajanja susednih antena je $\Delta_x = \Delta_y$. Niz se nalazi na visini $H = 0.15\text{ m}$ iznad zemlje.



Slika 2.12. Lokalizacija zakopanog objekta. Model u programu WIPL-D.

Radi utvrđivanja Grinovih funkcija, napraviti identičan model samo bez objekta. Pomoću opcije NEAR FIELD, proračunati blisko polje u mreži tačaka $x_{\min} < x < x_{\max}$, $y_{\min} < y < y_{\max}$, $-x_{\min} = x_{\max} = -y_{\min} = y_{\max} = 0.3\text{ m}$, na visini $z = 0$. Neka je broj tačaka $N_x = N_y = 40$. S obzirom na geometriju problema, dominantna komponenta prenosne matrice je G_{xx} . Za svaku tačku na mreži (x_i, y_j) , proračunati je na sledeći način:

$$G_{xx}(x_i, y_j; \mathbf{r}_k) = E_x(x_i, y_j; \mathbf{r}_k) Z_0(k, k) / h, \quad (2.56)$$

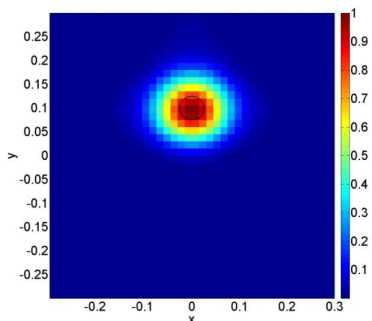
gde je k indeks predajne antene i \mathbf{Z}_0 impedansna matrica proračunata u modelu bez objekta.

Potom, formirati sliku

$$I(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \Delta Z(k, l) (G_{xx}(x_i, y_j; \mathbf{r}_k) G_{xx}(x_i, y_j; \mathbf{r}_l))^* , \quad (2.57)$$

gde je $\Delta Z(k, l)$ razlika impedansnih parametara, proračunatih sa i bez objekta, respektivno.

Na slici 2.13 prikazan je rezultat lokalizacije.



Slika 2.13. Slika objekta dobijena pomoću algoritma beamforming.

Singularna dekompozicija (SVD)

Ortogonalni vektori

Za par vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ kaže se da su ortogonalni ako je ispunjeno $\mathbf{x}^H \mathbf{y} = 0$, odnosno

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{x}^H \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1^* & \dots & x_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m x_i^* y_i = 0, \quad (3.2)$$

gde H označava operaciju konjugovanja i transponovanja matrice (vektora).

Unitarna matrica

Kvadratna matrica $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ je unitarna (*unitary*) ako važi $\mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1}$, odnosno $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Ako matricu \mathbf{Q} napišemo u funkciji njenih kolona, onda matični proizvod glasi

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{q}_m], \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^H \end{bmatrix} [\mathbf{q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{q}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^H \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^H \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_1^H \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_2^H \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^H \mathbf{q}_2 & & \mathbf{q}_2^H \mathbf{q}_m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_m^H \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_m^H \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_m^H \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \quad (3.4)$$

odatle sledi

$$\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Simbol δ_{ij} , Kronekerova delta, jednak je 1 ako je $i = j$, i 0 ako je $i \neq j$. Vektori za koje je ispunjeno (3.5) nazivamo ortonormalnim vektorima.

Singularna Dekompozicija

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ pravougaona matrica, gde su m i n proizvoljni celi brojevi. Singularna dekompozicija matrice \mathbf{A} je

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (3.6)$$

gde je

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m], \quad (3.7)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n], \quad (3.8)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_p & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ su unitarne matrice, a matrica $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je dijagonalna matrica. Dijagonalni elementi σ_j matrice $\mathbf{\Sigma}$ su veći ili jednaki nuli i poredani su po opadajućem redosledu, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$, gde je $p = \min(m, n)$. U razvijenom obliku singularna dekompozicija glasi

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^p \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H. \quad (3.10)$$

Primene singularne dekompozicije

Obrada slike

Za prenos slike formata 1000×1000 piksela, potrebno je preneti milion brojeva, gde svaki broj predstavlja kodovanu boju piksela. Umesto prenosa kompletne matrice, bolje je preneti samo suštinsku informaciju koja ona sadrži. Ukoliko primenimo singularnu dekompoziciju, obično je samo deo singularnih vrednosti značajan, dok su ostale približno jednake nuli. Ukoliko je broj značajnih singularnih vrednosti k , onda treba preneti samo k singularnih vrednosti, kao i prvih k singularnih vektora matrica \mathbf{U} i \mathbf{V} . Na primer ukoliko je $k = 50$, treba preneti $50 + 50 \cdot 1000 \cdot 2 = 100050 \ll 1000000$ brojeva.

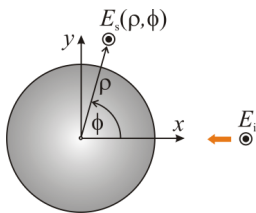
Rasejanje elektromagnetskog polja

Jedno od čestih pitanja prilikom rešavanja inverznih elektromagnetskih problema jeste dimenzionisanje antenskog niza koji se koristi prilikom rekonstrukcije nepoznatog objekta. Kao ilustraciju, posmatramo rasejanje savršeno provodnog, beskonačno dugačkog cilindra poluprečnika a , prikazanog na slici 3.1. Pod pretpostavkom da incidentni TM polarizovani

talas nailazi iz negativnog pravca x -ose, rasejano električno polje može da se predstavi u vidu sume

$$E_s^z(\rho, \phi) = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta \rho) e^{jn\phi}, \quad (3.11)$$

gde je E_0 efektivna vrednost incidentnog električnog polja, J_n Beselova funkcija prve vrste, n -tog reda, $H_n^{(2)}$ Hankelova funkcija druge vrste, n -tog reda i (ρ, ϕ) su polarne koordinate definisane na slici 3.1.



Slika 3.1. Rasejano električno polje beskonačno dugačkog metalnog cilindra.

U zoni zračenja važi aproksimacija

$$H_n^{(2)}(\beta \rho) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi \beta \rho}} j^n e^{-j\beta \rho}, \quad (3.12)$$

odakle sledi

$$E_s^z(\rho, \phi) \approx K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\phi}, \quad (3.13)$$

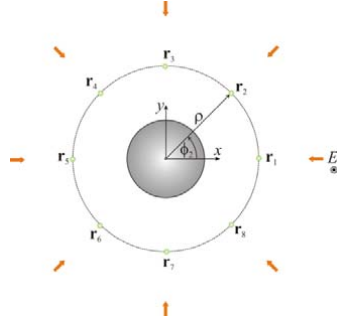
$$K = -E_0 \sqrt{\frac{2j}{\pi \beta}} \frac{e^{-j\beta \rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad c_n = \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)}. \quad (3.14)$$

Broj značajnih članova sume opada sa veličinom objekta. Može se pokazati da su doprinosi članova čiji je indeks veći od $n_{\max} = 2\beta a$ zanemarljivi, pa (3.13) postaje

$$E_s^z(\rho, \phi) \approx K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn\phi}. \quad (3.15)$$

Radi izvođenja opšteg izraza, posmatramo mernu konfiguraciju kao na slici 3.2. Cilindar je obuhvaćen kružnim nizom antena koje se nalaze na pozicijama $\mathbf{r}_i = (\rho, \phi_i)$, $i = 1, \dots, M$. Ukoliko su antene dovoljno udaljene od objekta, rasejano električno polje koje meri i -ta antena kada je j -ta antena prijemna, je približno

$$E_s(\phi(j), \phi(i)) = K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn(\phi(j) - \phi(i))}. \quad (3.16)$$



Slika 3.2. Merna konfiguracija.

Sva merenja mogu da se zapišu u jednu matricu, koja se naziva *multistatic data matrix*,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} E_s(\phi_1, \phi_1) & \dots & E_s(\phi_1, \phi_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_s(\phi_M, \phi_1) & \dots & E_s(\phi_M, \phi_M) \end{bmatrix} = \quad (3.17)$$

$$= K \begin{bmatrix} \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn(\phi_1 - \phi_1)} & \dots & \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn(\phi_1 - \phi_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn(\phi_M - \phi_1)} & \dots & \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n e^{jn(\phi_M - \phi_M)} \end{bmatrix} = \quad (3.18)$$

$$= K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n \begin{bmatrix} e^{jn(\phi_1 - \phi_1)} & \dots & e^{jn(\phi_1 - \phi_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jn(\phi_M - \phi_1)} & \dots & e^{jn(\phi_M - \phi_M)} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Definišimo vektore

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} e^{jn\phi_1} & \dots & e^{jn\phi_M} \end{bmatrix}^T, \quad n = 1, \dots, M. \quad (3.20)$$

Vektori su približno ortonormalni, odnosno važi

$$\mathbf{u}_k^H \mathbf{u}_n \approx \delta_{kn}, \quad -n_{\max} \leq k, n \leq n_{\max}. \quad (3.21)$$

Na osnovu (3.17)–(3.21), matricu merenja možemo da zapišemo u obliku

$$\mathbf{L} = \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} (KMc_n) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H. \quad (3.22)$$

Sa druge strane, ako primenimo singularnu dekompoziciju matrice \mathbf{L} , dobijamo

$$\mathbf{L} = \sum_{p=0}^M \lambda_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^H, \quad (3.23)$$

odakle sledi da su

- KMc_n singularne vrednosti matrice \mathbf{L} ,
- \mathbf{u}_n singularni vektori matrice \mathbf{L} .

Da bismo u potpunosti rekonstruisali rasejano polje cilindra, potrebno je da poznajemo singularne vrednosti c_n . Povećavanjem broja antena preko vrednosti $M > 2n_{\max} + 1$ ne dobijaju se nove informacije!

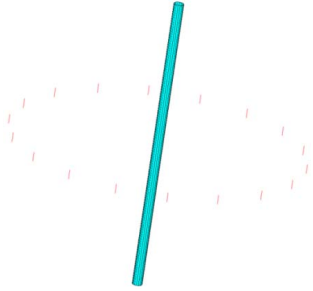
Zadatak: Primena singularne dekompozicije

Napraviti kružni niz polutalasnih dipola u čijem se središtu nalazi metalni cilindar, kao na slici 3.3. Radna učestanost je $f = 2$ GHz. Poluprečnik niza je $R = 5\lambda$, gde je λ talasna dužina u vazduhu. Visina cilindra je $h = 0.8$ m, a poluprečnik osnove je a . Na osnovu impedansnih parametara generisati približnu matricu \mathbf{L} ,

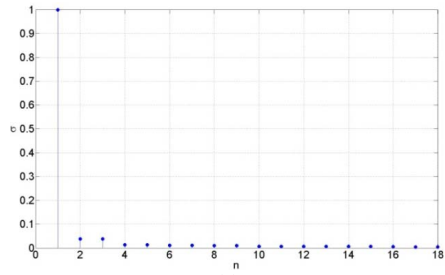
$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} \Delta Z_{11} & \cdots & \Delta Z_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta Z_{M1} & \cdots & \Delta Z_{MM} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

gde je ΔZ_{ij} razlika međusobnih impedansi između i -te i j -te antene, proračunatih u modelu sa cilindrom i bez cilindra.

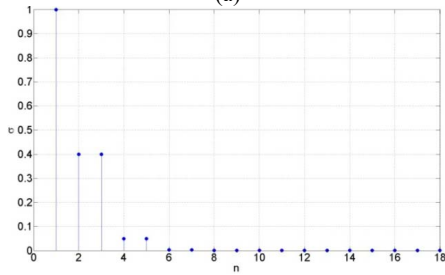
Pomoću Matlab komande `svd` odrediti singularnu dekompoziciju matrice \mathbf{L} , $[\mathbf{U} \ \boldsymbol{\Sigma} \ \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{L})$. Izdvojiti singularne vrednosti iz dijagonalne matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ i nacrtati ih u slučajevima: $\beta a = 0.1$, $\beta a = 1$ i $\beta a = 2$. Na slici 3.4 su prikazani rezultati simulacije. Kao što je očekivano, broj značajnih singularnih vrednosti raste sa porastom poluprečnika cilindra.



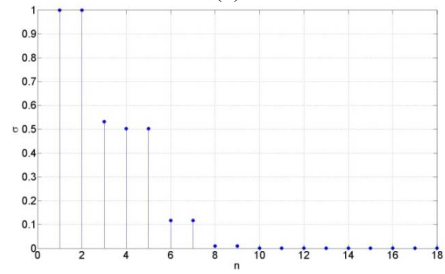
Slika 3.3. Metalni cilindar u prisustvu kružnog antenskog niza.



(a)



(b)



(c)

Slika 3.4. Normalizovane singularne vrednosti matrice L dobijene u slučaju (a) $\beta a = 0.2$, (b) $\beta a = 1$ i (c) $\beta a = 2$.

Neke osobine singularne dekompozicije

Jednostavnim transformacijama pokazuje se da važe sledeće osobine singularne dekompozicije:

$$\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \sum_{i=0}^P \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{L}^H \mathbf{u}_j = \sum_{i=0}^P \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{L}^H \mathbf{L} \mathbf{v}_j = \mathbf{L}^H \sum_{i=0}^P \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{L}^H \mathbf{u}_j = \lambda_j^2 \mathbf{v}_j, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{L}^H \mathbf{u}_j = \mathbf{L} \sum_{i=0}^P \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{L} \mathbf{v}_j = \lambda_j^2 \mathbf{u}_j, \quad (3.28)$$

pri čemu smo koristili osobinu ortonormalnosti singularnih vektora

$$\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \delta_{ij}. \quad (3.30)$$

U tabeli smo sumirali glavne osobine singularne dekompozicije:

$$\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$$

$$\mathbf{L}^H \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{L}^H \mathbf{L} \mathbf{v}_j = \lambda_j^2 \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{L} \mathbf{L}^H \mathbf{u}_j = \lambda_j^2 \mathbf{u}_j$$

Dekompozicija vektora

Singularnom dekompozicijom proizvoljne kompleksne matrice $\mathbf{L} \in C^{M \times N}$ dobijamo dva skupa ortogonalnih vektora, \mathbf{u}_j , $j=1, \dots, M$ i \mathbf{v}_i , $i=1, \dots, N$. Vektori \mathbf{u}_j definišu bazu prostora $C^{M \times 1}$. To znači da svaki vektor iz tog prostora može da se predstavi linearnom

kombinacijom vektora \mathbf{u}_j , na isti način kao što svaki vektor u trodimenzionalnom (3-D) prostoru može da se predstavi linearnom kombinacijom ortova $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z, \quad (3.31)$$

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_x, \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_y, \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_z, \quad (3.32)$$

gde su A_x, A_y i A_z projekcije vektora \mathbf{A} na pravce odgovarajućih ortova. Stoga za vektor $\mathbf{g} \in C^{M \times 1}$ možemo da napišemo

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^M g_i \mathbf{u}_i, \quad g_j = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_j \rangle, \quad (3.33)$$

gde se koeficijenti $g_j, j=1, \dots, M$ dobijaju kao skalarni proizvod vektora \mathbf{g} i j -tog bazisnog vektora,

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_j \rangle = \mathbf{u}_j^H \mathbf{g} = \sum_{i=1}^M g_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = g_j. \quad (3.34)$$

Na sličan način, vektori $\mathbf{v}_i, i=1, \dots, N$, predstavljaju bazu prostora $C^{N \times 1}$. Vektor $\mathbf{f} \in C^{N \times 1}$ možemo da predstavimo pomoću razvoja

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^M f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^M \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i. \quad (3.35)$$

Dekompozicije vektora i matrica sumirane su u tabeli:

$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^M g_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^M \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$
$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$
$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^P \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H$

Rešavanje sistema linearnih jednačina

Posmatramo sistem linearnih jednačina

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (3.36)$$

gde je sada $\mathbf{f} \in C^N$ nepoznati vektor, $\mathbf{g} \in C^M$ poznati vektor i $\mathbf{L} \in C^{M \times N}$ sistemska matrica. U opštem slučaju, broj nepoznatih podataka nije jednak broju poznatih, odnosno $M \neq N$. Zbog toga, ne možemo da rešimo sistem jednačina invertovanjem matrice, $\mathbf{f} \neq \mathbf{L}^{-1}\mathbf{g}$, jer \mathbf{L} nije kvadratna matrica.

Približno rešenje ovog sistema može da se dobije minimiziranjem srednje kvadratne greške između modela i merenja, $\|\mathbf{L}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$. Diferenciranjem greške po nepoznatom vektoru \mathbf{f} dobija se

$$\left(\mathbf{L}^H\mathbf{L}\right)\mathbf{f} = \mathbf{L}^H\mathbf{g}, \quad (3.37)$$

odnosno

$$\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{L}^H\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}^H\mathbf{g}. \quad (3.38)$$

Primenom singularne dekompozicije, pokazaćemo zašto dobijeno rešenje nije numerički stabilno. Posmatramo najpre levu stranu jednakosti (3.37). Na osnovu (3.27) i (3.35),

$$\left(\mathbf{L}^H\mathbf{L}\right)\mathbf{f} = \left(\mathbf{L}^H\mathbf{L}\right)\sum_{i=1}^N f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N f_i \left(\mathbf{L}^H\mathbf{L}\right)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^P f_i \sigma_i^2 \mathbf{v}_i. \quad (3.39)$$

Primenom (3.26) i (3.33), desna strana jednakosti (3.37) postaje

$$\mathbf{L}^H\mathbf{g} = \sum_{i=1}^M \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{L}^H\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^P \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \sigma_i \mathbf{v}_i. \quad (3.40)$$

Izjednačavanjem (3.39) i (3.40), dobija se

$$f_i \sigma_i^2 = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \sigma_i, \quad (3.41)$$

odnosno

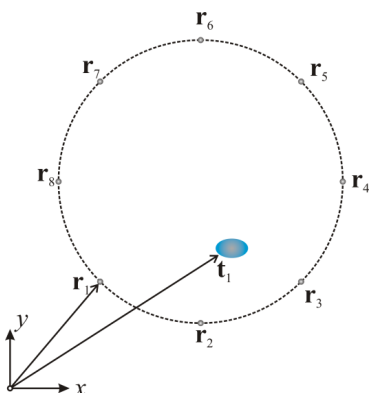
$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^P \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i. \quad (3.42)$$

Rešenje sa najmanjim kvadratnim odstupanjem je numerički nepovoljno zbog prevladavajućeg uticaja članova sa malim singularnim vrednostima. Naime, male singularne

vrednosti potiču od šuma. Javljaju se u obliku $1/\sigma_i$, zbog čega suma divergira, odnosno $\|\mathbf{f}\| \rightarrow \infty$. U sledećem poglavlju biće više reči o postupcima za regularizaciju rešenja kojima se postiže numerička stabilnost.

Tehnike lokalizacije zasnovane na singularnoj dekompoziciji

MUSIC algoritam



Slika 4.1. Merni sistem.

Pretpostavimo da želimo da odredimo poziciju nepoznatog objekta pomoću antenskih merenja, poput onog ilustrovanog na slici 4.1. Pozicija traženog objekta je određena vektorom položaja $\mathbf{t}_1 = (x_{t1}, y_{t1}, z_{t1})$. Položaj antena u nizu definisan je vektorima položaja $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$. Posmatramo situaciju kada i -ta antena radi kao predajna, a j -ta antena radi kao prijemna. Ako se objekat nalazi u dalekom polju antena, signal koji stiže do prijemnika je, približno, zakasnela i oslabljena replika poslatog signala,

$$E_s(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \approx \tau_1 \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_i|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_j|), \quad (4.1)$$

gde je τ_1 koeficijent koji je proporcionalan koeficijentu refleksije objekta. Podatke izmerene sa svih antena možemo da stavimo u multistatičku matricu podataka

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) & \dots & E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) & \dots & E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} = \quad (4.2)$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_1 \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) & \dots & \tau_1 \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1 \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) & \dots & \tau_1 \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \end{bmatrix} = \quad (4.3)$$

$$= \tau_1 \begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) \\ \vdots \\ \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) & \cdots & \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \end{bmatrix} = \quad (4.4)$$

$$= \tau_1 \mathbf{g}(\mathbf{t}_1) \mathbf{g}^T(\mathbf{t}_1), \quad (4.5)$$

gde je

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_1) = [\exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) \quad \cdots \quad \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|)]^T \quad (4.6)$$

vektor čiji su elementi proporcionalni odzivu niza na jedinični tačkasti rasejač koji se nalazi na mestu \mathbf{t}_1 . Pretpostavimo sada da se P malih objekata nalazi na pozicijama $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_P$. Smatramo da je interakcija između objekata zanemarljiva, odnosno da nema višestruke refleksije signala od objekata. U tom slučaju, signal koji prima i -ti prijemnik je približno jednak zbiru signala koje bi j -ti predajnik primio pojedinačno od svakog objekta,

$$E_s(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \approx \sum_{p=1}^P \tau_p \exp(-j\beta|\mathbf{r}_i - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_j - \mathbf{t}_p|). \quad (4.7)$$

Multistatička matrica podataka u tom slučaju glasi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^P \tau_p \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) & \cdots & \sum_{p=1}^P \tau_p \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^P \tau_p \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) & \cdots & \sum_{p=1}^P \tau_p \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \end{bmatrix} = \quad (4.8)$$

$$= \sum_{p=1}^P \tau_p \begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) & \cdots & \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_p|) & \cdots & \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_p|) \end{bmatrix} = \quad (4.9)$$

$$= \sum_{p=1}^P \tau_p \mathbf{g}(\mathbf{t}_p) \mathbf{g}(\mathbf{t}_p)^T. \quad (4.10)$$

U slučaju kada se rasejači nalaze u linearnom, u opštem slučaju nehomogenom dielektriku, u 2-D prostoru, rasejano polje (4.1) je približno

$$E_s(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \approx \sum_{p=1}^P \tau_p \mathbf{g}(\mathbf{t}_p, \mathbf{r}_i) \mathbf{g}(\mathbf{r}_j, \mathbf{t}_p), \quad (4.11)$$

gde je $g(\mathbf{t}_p, \mathbf{r}_i)$ skalarna Grinova funkcija. Zbog reciprociteta Grinove funkcije važi

$$E_s(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) \approx \sum_{p=1}^P \tau_p g(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_p) g(\mathbf{r}_j, \mathbf{t}_p). \quad (4.12)$$

Poput (4.6), definišemo vektor čiji su elementi odzivi antena u nizu na jedinični rasejač u tački \mathbf{t}_p u proizvoljnoj linearnoj sredini

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_p) = [g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}_p) \quad \dots \quad g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t}_p)]^T. \quad (4.13)$$

Kada se (4.13) uvrsti u (4.10), dobijamo generalni oblik za multistatičku matricu podataka. Radi dalje analize, (4.10) pišemo u obliku

$$\mathbf{L} = \sum_{p=1}^P \tau_p \mathbf{g}(\mathbf{t}_p) \mathbf{g}(\mathbf{t}_p)^T = \sum_{p=1}^P \tau_p \|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|^2 \frac{\mathbf{g}(\mathbf{t}_p) \mathbf{g}(\mathbf{t}_p)^T}{\|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\| \|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|}. \quad (4.14)$$

S druge strane, singularna dekompozicija matrice \mathbf{L} glasi

$$\mathbf{L} = \sum_{p=0}^M \lambda_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^H, \quad (4.15)$$

Da bi (4.15) predstavljao singularni razvoj matrice, potrebno je da vektori $\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)/\|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|$, $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_P$, budu ortonormalni, odnosno da važi

$$\frac{\mathbf{g}^H(\mathbf{t}_i)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{t}_i)\|} \cdot \frac{\mathbf{g}(\mathbf{t}_j)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{t}_j)\|} = \delta_{ij}. \quad (4.16)$$

U tom slučaju

$$\lambda_p = \begin{cases} \tau_p \|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|^2, & p \leq P, \\ 0, & P < p \leq M, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{g}(\mathbf{t}_p)/\|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|, \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{u}_p^*. \quad (4.18)$$

Na osnovu prethodnih izvođenja, možemo da definišemo MUSIC (MUltiple SIngal Classification) algoritam, koji je 1977. godine formulisao R.O. Schmidt, originalno namenjen za frekvencijsku estimaciju i lokalizaciju emitera.

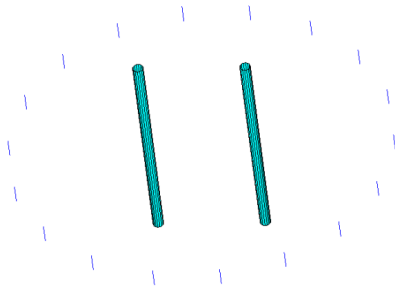
Posmatramo multistatičku matricu (\mathbf{L}) sistema koji se sastoji od M primopredajnih antena i P malih objekata čije pozicije tražimo:

- P singularnih vrednosti je različito od nule, $\sigma_1 > \dots > \sigma_P > 0$.

- Preostalih $M - P$ singularnih vrednosti je nula, $\sigma_{P+1} = \dots = \sigma_M = 0$.
- Singularni vektori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P$ odnose se na objekte (rasejače).
- Singularni vektori $\mathbf{u}_{P+1}, \dots, \mathbf{u}_M$ odnose se na šum.
- Singularni vektori koji se odnose na objekte proporcionalni su odzivu niza na jedinični rasejač na mestu objekta, $\mathbf{u}_p \approx \mathbf{g}(\mathbf{t}_p) / \|\mathbf{g}(\mathbf{t}_p)\|$, $p = 1, \dots, P$.
- Zbog ortogonalnosti singularnih vektora sledi $\sum_{m=P+1}^M \mathbf{u}_m^H \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t}_p) = 0$, gde je \mathbf{t}_p položaj bilo kog od P objekata.
- Slika objekta visoke rezolucije dobija se kao $I(x, y) = \frac{1}{\sum_{m=P+1}^M |\mathbf{u}_m^H \cdot \mathbf{g}(x, y)|}$.

U slučaju kada interakcija između objekata nije zanemarljiva ili kada objekat nije električki mali, broj P je veći od broja rasejača.

Zadatak: Primena MUSIC algoritma u slobodnom prostoru



Slika 4.2. Cilindri i kružni niz polutalasnih dipola.

- U programu WIPL-D napraviti kružni niz od 18 polutalasnih dipola. Usvojiti da je radna učestanost niza $f = 2$ GHz, a poluprečnik niza $R = 0.7$ m.
- Napraviti dva metalna cilindra poluprečnika $a = 2$ cm i visine $h = 40$ cm. Ose cilindra prolaze kroz tačke $x_1 = -0.2$ cm, $y_1 = 0$ i $x_2 = 0.2$ cm, $y_2 = 0$.
- Odrediti impedansne parametre sistema u prisustvu objekata, kao impedansne parametre samog niza.
- Definisati multistatičku matricu podataka (\mathbf{L}) kao razliku prethodno proračunatih impedansnih matrica.
- U programu Matlab, definisati uniformnu kvadratnu mrežu u prostoru: $-0.4 \text{ m} \leq x(i), y(j) \leq 0.4 \text{ m}$, $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, $N_x = N_y = 50$.
- Definisati promenljive koje predstavljaju koordinate elemenata antenskog niza, $x_a(m) = R \cos(2\pi(m-1)/M)$, $y_a(m) = R \sin(2\pi(m-1)/M)$, $m = 1, \dots, M$.

- Primeniti SVD dekompoziciju multistatičke matrice $[\mathbf{U} \quad \mathbf{\Sigma} \quad \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{L})$.
- Nacrtati singularne vrednosti $\sigma = \text{diag}(\mathbf{\Sigma})$. Na osnovu grafika, odrediti broj P .

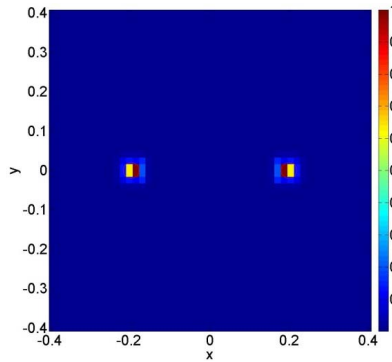
- Odrediti vrednost piksela $I(i, j) = \frac{1}{\sum_{m=P+1}^M |\text{dot}(\mathbf{u}_m, \mathbf{g}(x(i), y(j)))|}$,

gde je

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{U}(:, m),$$

$$\mathbf{g}(x(i), y(j)) = \begin{bmatrix} \exp\left(-j\beta\sqrt{(x(i)-x_a(1))^2 + (y(j)-y_a(1))^2}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j\beta\sqrt{(x(i)-x_a(M))^2 + (y(j)-y_a(M))^2}\right) \end{bmatrix}_{M \times 1}.$$

Na slici 4.3 prikazana je rekonstrukcija tankih cilindara pomoću algoritma MUSIC.



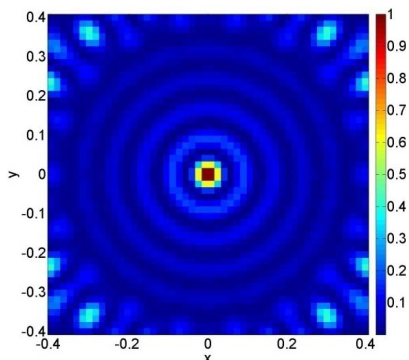
Slika 4.3. Rekonstrukcija cilindara sa slike 4.2 pomoću algoritma MUSIC.

Zadatak: Određivanje impulsnog odziva sistema

Point spread function je odziv sistema na rasejano polje koje potiče od tačkastog objekta. Ova funkcija predstavlja impulsni odziv sistema. Na osnovu njega, može se proceniti najmanje moguće rastojanje između dva objekta koji mogu da se razlikuju, odnosno rezolucija slike. Radi numeričkog određivanja ove funkcije, usvojimo da se tačkasti objekat nalazi u tački sa koordinatama $(0,0)$. U Matlabu, za niz iz prethodnog zadatka izračunati i grafički prikazati funkciju

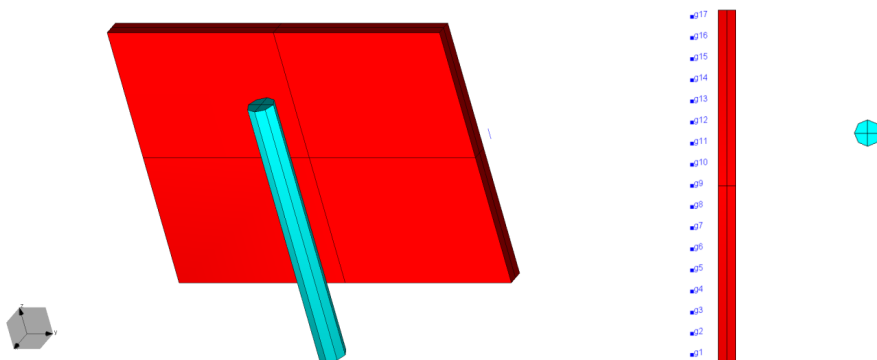
$$I(i, j) = \mathbf{g}(x_i, y_j)^H \mathbf{g}(0,0) = \sum_{m=1}^M \exp\left(+j\beta\sqrt{\exp(x_a(m)-x_i)^2 + (y_a(m)-y_j)^2}\right) \exp\left(-j\beta\sqrt{\exp(x_a(m)-0)^2 + (y_a(m)-0)^2}\right).$$

Rezultat proračuna su prikazani na slici 4.4. Rezolucija sistema zavisi od učestanosti, kao i broja elemenata u antenskom nizu.



Slika 4.4. Ilustracija proračuna impulsnog odziva sistema (PSF).

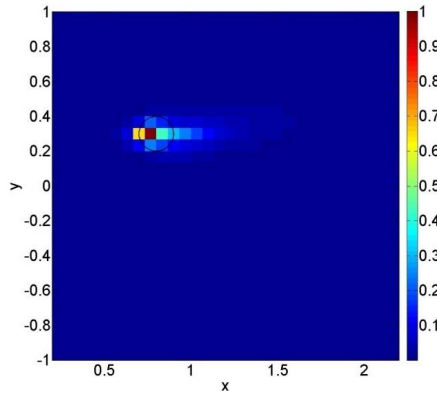
Zadatak: Lokalizacija tela iza zida primenom MUSIC algoritma



Slika 4.5. Simulacija eksperimenta u programu WIPL-D.

U programu WIPL-D, modelovati zid kao kvadar dimenzija $0.1\text{ m} \times 2\text{ m} \times 1.5\text{ m}$. Usvojiti da je permitivnost zida $\epsilon_r = 3$. Traženi objekat predstaviti pomoću metalnog cilindra, poluprečnika $r = 7.5\text{ cm}$ i visine $H = 1.5\text{ m}$. Centar cilindra postaviti u tačku sa Dekartovim koordinatama $(0.8\text{ m}, 0.3\text{ m})$, pri čemu se koordinatni početak poklapa sa centrom zida. Za detekciju koristiti antenski niz od 17 dipola, kao na slici 4.5. Osa niza je u pravcu y -ose, a sami dipoli su orijentisani u pravcu z -ose. Radna učestanost je $f = 1\text{ GHz}$. Dužina kraka dipola je $h = \lambda/10$, a rastojanje između osa susednih dipola je $4h$. Udaljenost ose dipola od bliže ivice zida je 15 cm .

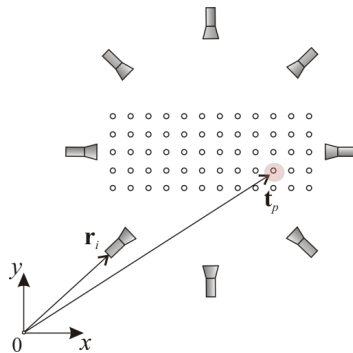
- Proračunati blisko polje u tačkama $0.2 \text{ m} < x < 2.2 \text{ m}$, $-1 \text{ m} < y < 1 \text{ m}$, $N_x = N_y = 30$.
- Na osnovu prethodnog proračuna, odrediti numerički Grinove funkcije G_{zz} .
- Pomoću razlike impedansnih parametara, sa i bez prisustva objekta, odrediti lokaciju cilindra.



Slika 4.6. Rekonstrukcija objekta iza zida primenom metode MUSIC.

Rezultat rekonstrukcije je prikazan na slici 4.6.

Skraćena (Truncated) SVD metoda



Slika 4.7. Nepoznati objekat okružen nizom antena.

Problem lokalizacije nepoznatog objekta može da se formuliše u vidu linearnog sistema jednačina. Posmatramo scenario kao na slici 4.7, gde se nepoznati objekat (ovalno telo) nalazi okružen antenskim nizom. Radi jednostavnosti, usvajamo da prva antena radi kao predajna, a ostale su prijemnici. Objekat tražimo u diskretnoj mreži tačaka \mathbf{t}_n , $n=1, \dots, N$, koja je kružićima prikazana na slici 3.10. Za električki mali objekat, koji se nalazi u tački \mathbf{t}_p , vektor primljenih signala je približno

$$\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{t}_p - \mathbf{r}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_p - \mathbf{r}_1|) \\ \vdots \\ \exp(-j\beta|\mathbf{t}_p - \mathbf{r}_M|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_p - \mathbf{r}_1|) \end{bmatrix} \sigma_p, \quad (4.19)$$

gde je σ_p koeficijent refleksije objekta. Ništa se neće promeniti ukoliko u ostale tačke pretraživanja dodamo po jedan tačkasti rasejač čiji je koeficijent refleksije nula, $\sigma_n = 0$, $n = 1, \dots, N$, $n \neq p$. Primljeni signal možemo sada da zapišemo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) & \dots & \exp(-j\beta|\mathbf{t}_N - \mathbf{r}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_N - \mathbf{r}_1|) \\ \vdots \\ \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_M|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_1 - \mathbf{r}_1|) & \dots & \exp(-j\beta|\mathbf{t}_N - \mathbf{r}_M|) \exp(-j\beta|\mathbf{t}_N - \mathbf{r}_1|) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}, \quad (4.20)$$

odnosno, u skraćenom obliku,

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}. \quad (4.21)$$

U stvarnosti, mi ne znamo u kojoj se tački nalazi objekat. Stoga su za nas koeficijenti refleksije sadržani u vektoru \mathbf{f} nepoznati. Pokazali smo u (3.42) da je rešenje sa najmanjim kvadratnim odstupanjem

$$\mathbf{f} = (\mathbf{L}^H \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^H \mathbf{g} = \sum_{i=1}^P \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (4.22)$$

kao i da je ono numerički nepovoljno zbog preovladavajućeg uticaja članova sa malim singularnim vrednostima. Naime, male singularne vrednosti potiču od šuma. Javljanje se u obliku $1/\sigma_i$ zbog čega suma divergira, odnosno $\|\mathbf{f}\| \rightarrow \infty$. Zbog toga se primenjuje takozvana Truncated SVD (TSVD) metoda, gde se koristi samo prvih K članova sume (4.22),

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^K \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (4.23)$$

kod kojih su singularne vrednosti veće od zadatog praga.

Zadatak: Primena TSVD metode

U programu WIPL-D, modelovati kružni antenski niz od 36 polutalasnih dipola, gde je poluprečnik niza 0.72 m. Radna učestanost niza je $f = 2$ GHz. Napraviti metalni cilindar, poluprečnika 2 cm i dužine 0.8 m. Osa cilindra prolazi kroz tačku $(\square 0.2 \text{ m}, 0)$. Odrediti lokaciju objekta primenom TSVD metode na sledeći način:

- Definisati vektor izmerenih vrednosti \mathbf{g} ,

$$\mathbf{g} = [\Delta Z_{11} \quad \dots \quad \Delta Z_{MM}]^T,$$

čiji su elementi razlike impedansnih parametara, proračunatih sa i bez objekta.

Dimenzije vektora su $M^2 \times 1$, $M = 36$.

- Definisati mrežu tačaka u kojima se vrši pretraživanje,

$$-0.4 \leq x, y \leq 0.4, \quad N_x = N_y = N = 50.$$

- Proračunati sistemsku matricu \mathbf{L} .

Elementi matrice predstavljaju prenos između svakog mernog para i potencijalne lokacije objekta (tačke na mreži). U vakuumu, matrica glasi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_1|) & \dots & \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_{N^2}|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_1 - \mathbf{t}_{N^2}|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_1|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_1|) & \dots & \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_{N^2}|) \exp(-j\beta|\mathbf{r}_M - \mathbf{t}_{N^2}|) \end{bmatrix},$$

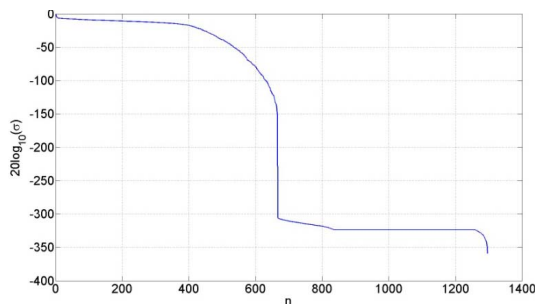
gde su \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, M$, lokacije antena, a \mathbf{t}_n , $n = 1, \dots, N^2$, lokacije tačaka na mreži.

Veličina ove matrice je $M^2 \times N^2$.

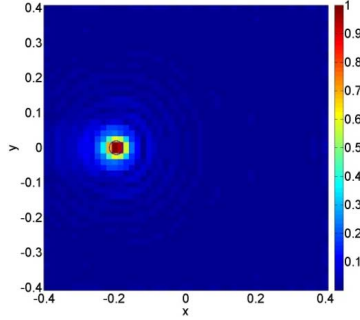
Izračunati singularne vrednosti i singularne vektore matrice \mathbf{L} . Nacrtati grafik

- normalizovanih singularnih vrednosti. Sa grafika odrediti približni indeks poslednje značajne singularne vrednosti kao $20 \log_{10}(\sigma(K)) = -20$ dB.
- Pomoću sume (4.23), odrediti vektor \mathbf{f} čiji su elementi proporcionalni koeficijentima refleksije tačaka na mreži.
- Vektor \mathbf{f} pretvoriti u sliku pomoću funkcije reshape: $I = \text{reshape}(|\mathbf{f}|, N, N)$.

Na slici 4.8 prikazan je grafik singularnih vrednosti u logaritamskoj skali. Rezultat rekonstrukcije je predstavljen na slici 4.9.



Slika. 4.8. Normalizovane singularne vrednosti u logaritamskoj skali.



Slika. 4.9. Lokacija cilindra određena primenom metode TSVD.

Tihonov regularizacija

Da bi se ograničila energija nepoznatih koeficijenata, $\|\mathbf{f}\|$, rešenje može da se traži u obliku

$$\|\mathbf{L}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \alpha\|\mathbf{f}\|^2, \quad (4.24)$$

gde je α koeficijent regularizacije. Prvi član minimizira kvadratnu grešku, a drugi član ograničava kvadratnu normu rešenja. Odgovarajućim izborom koeficijenta α balansira se između ova dva uslova. Diferenciranjem (4.24) po nepoznatom vektoru \mathbf{f} , dobija se

$$(\mathbf{L}^H\mathbf{L} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{f} = \mathbf{L}^H\mathbf{g}. \quad (4.25)$$

Primenom singularne dekompozicije, (4.25) postaje

$$(\mathbf{L}^H\mathbf{L} + \alpha\mathbf{I})\sum_{i=1}^P f_i \mathbf{v}_i = \mathbf{L}^H \sum_{i=1}^P \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i, \quad (4.26)$$

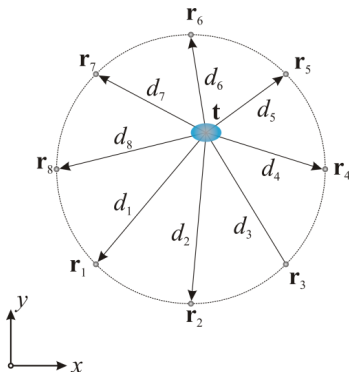
$$\sum_{i=1}^P f_i (\sigma_i^2 + \alpha) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^P \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \sigma_i \mathbf{v}_i. \quad (4.27)$$

Izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane (4.27) dobija se

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^P f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^P \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha} \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i. \quad (4.28)$$

Koeficijent regularizacije se bira tako bude znatno manji od najveće singularne vrednosti. Na taj način, α ne utiče na članove razvoja koji odgovaraju velikim singularnim vrednostima jer je tada $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha} \approx \frac{1}{\sigma_i}$. S druge strane, kod jako malih singularnih vrednosti $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha} \approx \frac{\sigma_i}{\alpha} \approx 0$, čime se sprečava divergencija rezultata. Ovakav postupak se naziva Tihonov regularizacija.

Linear Sampling



Slika 4.10. Kružni niz antena i nepoznati objekat.

Pretpostavimo da se nepoznati, električki mali, objekat nalazi u tački određenoj vektorom položaja \mathbf{t} , a prijemni niz antena u tačkama $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M$. Na slici 4.10, prikazan je primer jednog takvog niza koji se sastoji od 8 elemenata. Radi definisanja metode, polazimo od analitičkog oblika multistatičke matrice, odnosno, matrice u kojoj su smeštena sva merenja. U vazduhu, ona je približno

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} \tau \exp(-j\beta(d_1 + d_1)) & \dots & \tau \exp(-j\beta(d_1 + d_M)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau \exp(-j\beta(d_M + d_1)) & \dots & \tau \exp(-j\beta(d_M + d_M)) \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

gde je τ koeficijent refleksije objekta, a d_1, \dots, d_M rastojanja od centra objekta do odgovarajućih antena. Zanima nas da li postoji niz koeficijenata $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_M]^T$ pomoću kojih možemo da fokusiramo merenja kao da potiču iz ekvivalentnog izvora koji se nalazi u tački \mathbf{t} , odnosno,

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (4.30)$$

gde je

$$\mathbf{g} = [\exp(-j\beta d_1) \quad \dots \quad \exp(-j\beta d_M)]^T. \quad (4.31)$$

vektor odziva niza na jedinični rasejač u tački \mathbf{t} . U ovom jednostavnom slučaju, rešenje je

$$\mathbf{f} = \mathbf{g}^* = [\exp(+j\beta d_1) \quad \dots \quad \exp(+j\beta d_M)]^T. \quad (4.32)$$

Na sličan, u slučaju nehomogene linearne sredine, multistatička matrica je približno

$$\mathbf{L} \approx \tau \begin{bmatrix} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t})g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}) & \dots & g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t})g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t})g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}) & \dots & g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t})g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t}) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Vektor odziva niza na tačkasti rasejač je

$$\mathbf{g} = [g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}) \dots g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t})]^\top, \quad (4.34)$$

a vektor koeficijenata koji omogućava fokusiranje

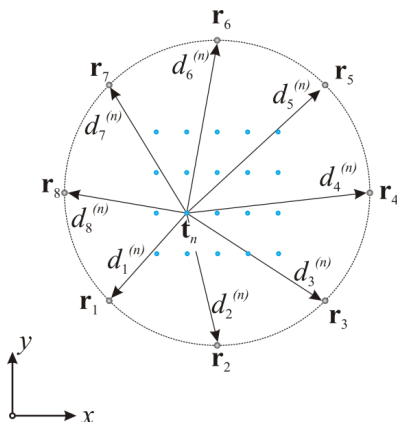
$$\mathbf{f} = \mathbf{g}^* = [g^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}) \dots g^*(\mathbf{r}_M, \mathbf{t})]^\top. \quad (4.35)$$

U realnim situacijama, položaj objekta je nepoznat. Zbog toga, definišemo oblast pretraživanja u vidu mreže tačaka $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N$, kao na slici 4.11. Za svaku tačku, definišemo vektor odziva niza

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_n) = [g(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}_n) \dots g(\mathbf{r}_M, \mathbf{t}_n)]^\top, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.36)$$

U specijalnom slučaju, u vakuumu, odziv niza je

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_n) = [\exp(-j\beta d_1^{(n)}) \dots \exp(-j\beta d_M^{(n)})]^\top, \quad d_i^{(n)} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{t}_n\|. \quad (4.37)$$



Slika 4.11. Uz formulisanje linear sampling metode.

Odgovarajući sistem linearnih jednačina za svaku tačku je

$$\mathbf{L}\mathbf{f}(\mathbf{t}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{t}_n). \quad (4.38)$$

Rešenje tražimo pomoću regularizovane singularne dekompozicije,

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}_n) = \sum_{i=1}^P \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \alpha^2} \langle \mathbf{g}(\mathbf{t}_n), \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i, \quad (4.39)$$

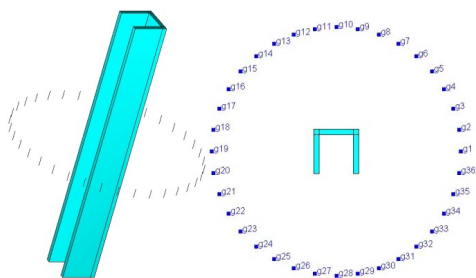
gde je α regularizacioni koeficijent. Usvajamo da je $\alpha = 0.001\sigma_1$.

Pretpostavka je da sistem jednačina ima konačno rešenje ukoliko tačka \mathbf{t}_n pripada objektu. U suprotnom, fokusiranje je nemoguće, odnosno rešenje divergira, $\mathbf{f}(\mathbf{t}_n) \rightarrow \infty$. Možemo da fokusiramo primljene signale kao da se emituju iz neke tačke jedino ako je ta tačka deo objekta. Stoga, n -ti piksel slike dobijamo kao

$$I(\mathbf{t}_n) = 1 / \|\mathbf{f}(\mathbf{t}_n)\|. \quad (4.40)$$

Zadatak: Primena metode Linear Sampling

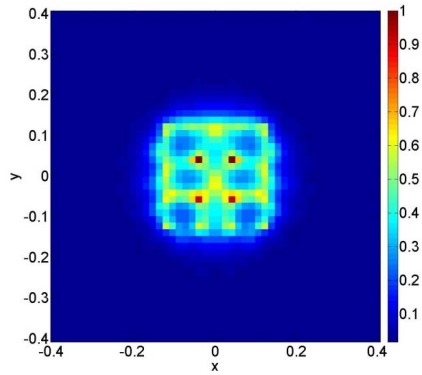
U programu WIPL-D, modelovati kružni antenski niz od 36 polutalasnih dipola, gde je poluprečnik niza 0.72 m. Radna učestanosti niza je $f = 2$ GHz. Napraviti cilindrično telo u obliku latiničnog slova U, dužine stranice 0.26 m.



Slika 4.12. Model u programu WIPL-D.

Radi određivanja oblika objekta primenom metode *Linear sampling* slediti ove korake:

- Definisati multistatičku matricu podataka \mathbf{L} koja je jednaka razlici impedansnih matrica proračunatih sa i bez objekta.
- Izračunati singularne vrednosti i singularne vektore matrice \mathbf{L} .
- Definisati mrežu tačaka u kojima se vrši pretraživanje, $-0.4 \leq x, y \leq 0.4$, $N_x = N_y = N = 50$.
- Za svaku tačku na mreži odrediti odziv niza (4.36). Odrediti odgovarajuću vrednost piksela primenom izraza (4.39) i (4.40).



Slika. 4.13. Slika cilindra sa poprečnim presekom u obliku latiničnog slova U dobijena primenom metode LSM.

Rezultat rekonstrukcije je prikazan na slici 4.13. Konveksna anvelopa objekta je dobro procenjena. Međutim, otvor nije vidljiv, što je posledica višestruke refleksije signala.

Kvantitativne tehnike rekonstrukcije

U mnogim situacijama nas, pored oblika ispitivanog objekta i njegove lokacije, zanima i sastav materijala od koga je sačinjen. U tom slučaju, govorimo o kvalitativnim tehnikama inverznog rasejanja. Svoju primenu, kvalitativne tehnike su našle u medicinskoj dijagnostici (formiranje slike tkiva), geološkim ispitivanjima (određivanje sastava tla), poljoprivredi (ispitivanje vlažnosti zemlje) i brojnim drugim situacijama.

Bornova inverzija

Polazna jednačina za većinu metoda inverznog rasejanja je zapreminska teorema ekvivalencije, koja u vakuumu glasi

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \int_V \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') dv = j\omega\epsilon_0 \int_V (\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1) \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv, \quad (4.1)$$

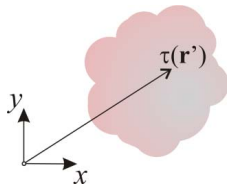
gde je $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dijadička Grinova matrica, $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ ukupno polje u objektu i $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ rasejano polje na mestu prijemnika. Naglašavamo da rasejano električno polje ne postoji kao stvarna fizička veličina koja može da se izmeri. Naime, prijemna antena meri ukupno električno polje, tj. polje u prisustvu objekta, \mathbf{E} . U nekim situacijama, moguće je ukloniti objekat i onda izmeriti incidentno električno polje, \mathbf{E}_{inc} . Rasejano polje se tada dobija kao razlika ta dva merenja, odnosno $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{inc}$. Međutim, to najčešće nije izvodljivo (npr. prilikom podzemnih ili građevinskih ispitivanja). Tada se incidentno električno polje proračunava numerički, pomoću nekog softvera za elektromagnetsku analizu.

Rekonstrukcija objekta na osnovu (4.1) je nelinearan problem u kome je, pored permitivnosti (ϵ_r), nepoznato i polje u objektu. Problem je i neodređen jer broj nepoznatih često premašuje broj merenja. Neodređenost je izrazita kod nehomogenih sredina kod kojih se parametri značajno menjaju sa učestanošću. Radi ilustracije ove neodređenosti, možemo da zamislimo da je unutrašnjost objekta podeljena na kockice, gde svaka kockica ima konstantnu permitivnost. Ako se permitivnost menja od kockice do kockice, broj nepoznatih je jednak broju kockica. S druge strane, broj merenja koji nam je na raspolaganju je konačan. Najpre, zato što iz praktičnih razloga ne možemo da postavimo beskonačan broj antena. Međutim, broj nezavisnih merenja je i suštinski ograničen. Naime, prostorna varijacija polja je konačna i zavisi od dimenzija rasejača. Optimalan broj merenja zavisi od brzine kojom se polje menja u prostoru. Sličan fenomen postoji i u telekomunikacijama, gde nema smisla odabirati signal sa učestanošću koja je veća od one određene Nikvistovim kriterijumom.

Problem se može, delimično, pojednostaviti kada je permitivnost objekta bliska permitivnosti okoline. U tom slučaju, ukupno električno polje u objektu je približno jednako incidentnom električnom polju, odnosno polju koje bi se uspostavilo bez prisustva objekta (Bornova aproksimacija). Tada (4.1) postaje

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0 \int_v (\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{v} = j\omega\epsilon_0 \int_v \tau(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}, \quad (4.2)$$

gde je $\tau = \epsilon_r - 1$ funkcija kontrasta. Integralna jednačina je sada linearna jer je kontrast jedina nepoznata veličina.



Slika 4.1. Poprečni presek nepoznatog objekta.

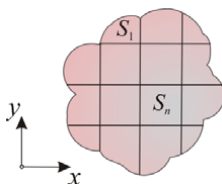
Zbog jednostavnosti, ograničavamo se na dvodimenzione (2-D) probleme. Smatramo da je objekat beskonačno dugačak, konstantnog poprečnog preseka. Na slici 4.1, ilustrovali smo poprečni presek jednog takvog objekta i usvojeni koordinatni sistem. Električne osobine objekta su konstantne duž z -ose, dok se u $0xy$ ravni menjaju na proizvoljan način. U 2-D slučaju, (4.2) glasi

$$E_s(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0 \int_S \tau(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_{inc}(\mathbf{r}') dS, \quad (4.3)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\beta^2}{8\pi f \epsilon_0} H_0^2(\beta d), \quad d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (4.4)$$

gde je $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 2-D Grinova funkcija u vakuumu, H_0^2 Hankelova funkcija druge vrste nultog reda, β fazni koeficijent i S poprečni presek objekta.

Radi numeričkog rešavanja jednačine (4.3), potrebno je da se izvrši diskretizacija funkcije kontrasta. Zbog toga, poprečni presek S delimo na male površi S_n , $n = 1, \dots, N$, kao na slici 4.2. Smatramo da je podela dovoljno fina da kontrast bude približno konstantan po svakoj površi S_n .



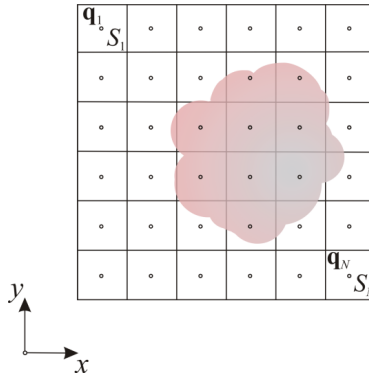
Slika 4.2. Diskretizacija poprečnog preseka objekta.

U diskretnom obliku (4.3) je

$$E_s(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \tau(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_{\text{inc}}(\mathbf{r}') dS = \sum_{n=1}^N \tau_n \int_{S_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_{\text{inc}}(\mathbf{r}') dS, \quad (4.5)$$

gde su τ_n , $n = 1, \dots, N$, nepoznati koeficijenti kontrasta koji odgovaraju površinama S_n .

U realnim situacijama oblik objekta je često nepoznat. Zbog toga, posmatramo površ za koju znamo da sigurno sadrži objekat. Na sličan način kao i u prethodnom slučaju, tu površ delimo na manje površine, S_n , $n = 1, \dots, N$, kao što je prikazano na slici 4.3. Svakoj površini dodeljujemo konstantan, ali nepoznat kontrast τ_n , $n = 1, \dots, N$. U idealnom slučaju, rekonstrukcijom bi trebalo da dobijemo da su koeficijenti τ_n nula izvan objekta, a u objektu jednaki stvarnim vrednostima.



Slika 4.3. Ispitivani prostor i njegova podela.

Da bi smo odredili nepoznate koeficijente, formiramo linearan sistem jednačina. Smatramo da nam je poznato rasejano polje na mestu antena, \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, M$. Pod pretpostavkom da je prva antena predajna, a i -ta antena prijemna dobijamo,

$$E_s(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1) = \sum_{n=1}^N \tau_n \int_{S_n} G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') E_{\text{inc}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) dS. \quad (4.6)$$

U opštem slučaju, integrali koji se pojavljuju u (4.6) se određuju numerički. Međutim, zbog jednostavnosti smatramo da su površine S_n dovoljno male da se incidentno polje i Grinova funkcija ne menjaju značajno po njima. U tom slučaju važi aproksimacija

$$\int_{S_n} G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') E_{\text{inc}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) dS \approx G(\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_n) E_{\text{inc}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{r}_1) \Delta S, \quad (4.7)$$

gde je \mathbf{q}_n središnja tačka površi S_n , a ΔS njena površina. Linearni sistem jednačina glasi

$$E_s(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) = \sum_{n=1}^N \tau_n \underbrace{G(\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_n) E_{\text{inc}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{r}_i)}_{a_{in}} \Delta S = \sum_{n=1}^N \tau_n a_{in}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (4.8)$$

U matricnoj formi (4.8) je

$$\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{MN} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.10)$$

gde indeks (1) označava da prva antena radi kao predajna.

Nažalost, kao što ne može da se napravi panoramska fotografija predela snimajući samo iz jednog pravca, tako ne može ni da se odredi objekat na osnovu samo jednog emitovanog signala. Zbog toga, formiramo jednačine (4.11), za svaku predajnu antenu. Konačan linearan sistem jednačina glasi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{(M)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.11)$$

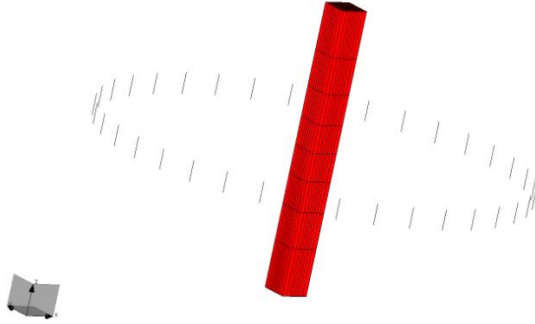
odnosno

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \boldsymbol{\tau}. \quad (4.12)$$

Zadatak: Primena Bornove inverzije za procenu sastava tela

Napraviti sliku i odrediti približni sastav nepoznatog objekta pomoću merenja dobijenih kružnim antenskim nizom. Traženi objekat je dielektrični cilindar, kvadratnog poprečnog preseka, stranice 2 cm, visine 20 cm i relativne permitivnosti $\epsilon_r = 1.5$. Centar objekta nalazi se u tački sa Dekartovim koordinatama (5 mm, 5 mm, 0). Antenski niz se sastoji od $M = 36$ kratkih dipola. Poluprečnik niza je $R = 0.15$ m, a radna učestanost je $f = 2$ GHz. Dužina kraka dipola je $h_d = \lambda / 20$, gde je λ talasna dužina na datoj učestanosti. Usvojiti za poluprečnik žice $r_d = h_d / 20$. Smatrati da se objekat nalazi u prostoru $-a \leq x, y \leq a$, gde je $a = 2$ cm. Izgled modela u programu WIPL-D prikazan je na slici 4.4.

Za potrebe rešavanja inverznog problema, ispitivani prostor podeliti na mrežu koja se sastoji od 10×10 kvadrata. Potrebne veličine za proračun su: incidentno električno polje, Grinova funkcija i "izmereno" rasejano električno polje. U sledećih nekoliko koraka objašnjena je implementacija algoritma.



Slika 4.4. Model ispitivanog objekta u programu WIPL-D.

- **Incidentno električno polje** odrediti u čvorovima kvadratne mreže, primenom opcije NEAR FIELD u programu WIPL-D. Ulazni podaci za odgovarajuću tabelu su

$$x_{\min} = -a, \quad x_{\max} = a, \quad N_x = 10,$$

$$y_{\min} = -a, \quad y_{\max} = a, \quad N_y = 10,$$

$$z_{\min} = 0, \quad z_{\max} = 0, \quad N_z = 1.$$

- **Dvodimenziona Grinova funkcija** u vakuumu može da se odredi pomoću funkcije `besselh` koja generiše Hankelove funkcije. Argumenti funkcije su `besselh(0, 2, beta*d)`, gde je d rastojanje između prijemne antene i centra odgovarajuće kvadratne površine.
- **Rasejano električno polje** na mestu prijemnika se može približno izračunati na osnovu impedansnih parametara. Kada m -ta antena radi kao predajnik, napon na prijemnoj n -toj anteni je

$$U_n = Z(m,n)I_m = Z(m,n) \frac{1 \text{ V}}{Z(m,m)},$$

gde je I_m struja predajne antene, a $Z(m,n)$ i $Z(m,m)$ su impedansni parametri proračunati u prisustvu objekta. S druge strane, indukovana elektromotorna sila u prijemnoj anteni je

$$U_n = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{l}_{\text{eff}},$$

gde je \mathbf{l}_{eff} efektivna dužina antene. U slučaju kratkog dipola $l_{\text{eff}} = h_d$. Odatle sledi da je polje na mestu antene, u prisustvu objekta,

$$E(n,m) = -\frac{U_n}{h_d} = -\frac{Z(m,n)}{Z(m,m)h_d}.$$

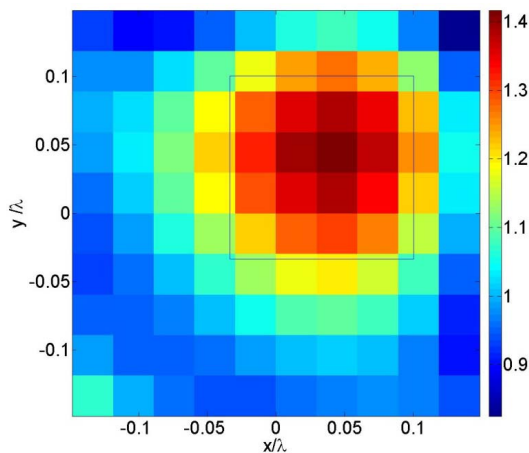
Na sličan način, incidentno polje je

$$E_{\text{inc}}(m,n) = -\frac{Z_0(m,n)}{Z_0(m,m)h_d},$$

gde su $Z_0(m,n)$ i $Z_0(m,m)$ impedansni parametri proračunati kada je objekat uklonjen.

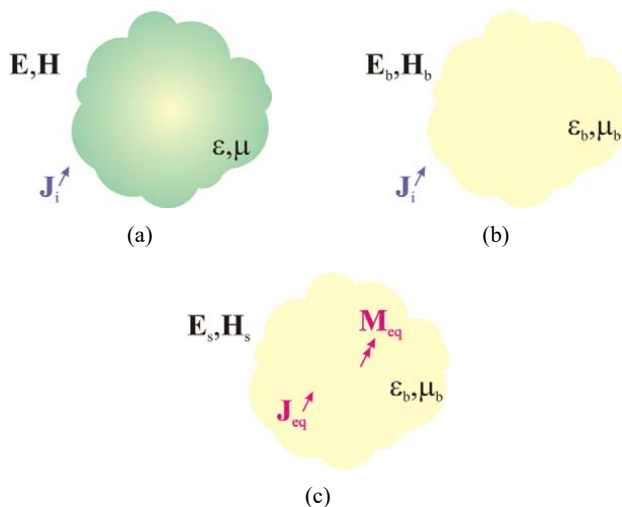
Dobijeni sistem linearnih jednačina, po nepoznatim koeficijentima kontrasta, rešiti pomoću singularne dekompozicije. Usvojiti da je regularizacioni parametar $\alpha = 0.01 \sigma_{\max}$, gde je

σ_{\max} najveća singularna vrednost. Preporučuje se ispitavanje uticaja regularizacionog parametra na kvalitet rešenja.



Slika 4.5. Rekonstrukcija objekta dobijena primenom Bornove inverzije.

Na slici 4.5 prikazana je rekonstruisana permitivnost ispitivanog prostora. Na mestu objekta, permitivnost je najveća i približava se tačnoj vrednosti $\epsilon_r = 1.5$. U okolini objekta, procenjena permitivnost osciluje oko permitivnosti vakuuma. Korišćenjem finije podele i/ili iterativnog postupka, kvalitet slike bi bio još bolji.



Slika 4.6. Ilustracija teoreme opšte teoreme ekvivalencije. (a) Ukupno polje, (b) "incidentno" polje i (c) rasejano polje sa ekvivalentnima strujama.

Iterativne Bornove Metode

Upotreba Bornove inverzije ograničena je na slučaj kada je permitivnost ispitivanog objekta bliska permitivnosti okoline. Međutim, ona može da se proširi iterativnom primenom, gde se nepoznata permitivnost postepeno rekonstruiše. Ovde ćemo objasniti jednu od najpoznatijih tehnika inverznog rasejanja, takozvani *Distorted Born iterative method* (DBIM). Polazimo od izraza za rasejano električno polje u nemagnetskoj sredini

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_b(\mathbf{r}) = j\omega \int_v (\varepsilon(\mathbf{r}') - \varepsilon_b(\mathbf{r}')) \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dv, \quad (4.13)$$

gde je \mathbf{E} ukupno polje u sredini permitivnosti ε , $\overline{\mathbf{G}}_b$ dijadička Grinova funkcija proračunata u sredini permitivnosti ε_b i \mathbf{E}_b incidentno polje u sredini ε_b . Sve veličine ilustrovane su na slici 4.6. Određivanje nepoznate permitivnosti $\varepsilon(\mathbf{r}')$ na osnovu jednačine (4.13) je teško zbog njene nelinearnosti. Ukoliko je razlika između ε i ε_b mala, usvaja se aproksimacija da je $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_b$ u dielektriku. Tada (4.13) postaje

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \approx j\omega \int_v (\varepsilon(\mathbf{r}') - \varepsilon_b(\mathbf{r}')) \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}') dv. \quad (4.14)$$

Radi numeričkog rešavanja jednačine (4.13), potrebno je da izvršimo diskretizaciju. Domen v delimo na K manjih domena, v_k , u kojima važi da je permitivnost približno konstantna. Svakom domenu dodeljuje se nepoznati koeficijent kontrasta, odnosno $\tau_k = \varepsilon - \varepsilon_b(k)$, $k=1, \dots, K$. Primenjeno na slučaj kada se objekat ispituje pomoću M primo-predajnih antena, dobijamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) - \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) = j\omega \sum_{i=1}^K \tau_k \int_{v_k} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_n) dv, \quad m, n = 1, \dots, M, \quad (4.15)$$

gde je \mathbf{r}_m pozicija prijemne antene, a \mathbf{r}_n pozicija predajne antene. U matricnom obliku, (4.15) je

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{v_1} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) & \cdots & \int_{v_K} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \\ \int_{v_1} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) & \cdots & \int_{v_K} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{v_1} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_M) & \cdots & \int_{v_K} \overline{\mathbf{G}}_b(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}', \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4.16)$$

odnosno

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}. \quad (4.17)$$

Prilikom implementacije iterativnog postupka potrebno je da se usvoji početno rešenje za permitivnost svakog voksel, $\boldsymbol{\epsilon}_b^{(1)} = [\epsilon_{b,1}^{(1)} \dots \epsilon_{b,K}^{(1)}]^T$. Potom se proračunaju odgovarajuće vrednosti za vektor električnog polja $\mathbf{E}_b^{(1)}$, dijadičku Grinovu matricu $\overline{\mathbf{G}}_b^{(1)}$ i "rasejano" električno polje $\mathbf{E}_s^{(1)}$. (Rasejano električno polje predstavlja razliku između ukupnog polja i polja u sredini $\boldsymbol{\epsilon}_b^{(1)}$.) Formira se sistem jednačina

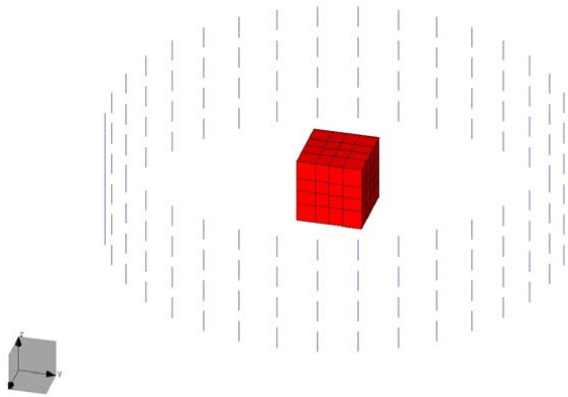
$$\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(1)} \quad (4.18)$$

koji daje procenu kontrasta. Novo rešenje za permitivnost je

$$\boldsymbol{\epsilon}_b^{(2)} = \boldsymbol{\epsilon}_b^{(1)} + \boldsymbol{\tau}^{(1)}. \quad (4.19)$$

Kao u prvom koraku, određuju se nove vrednosti za električnog polja $\mathbf{E}_b^{(2)}$, dijadičku Grinovu matricu $\overline{\mathbf{G}}_b^{(2)}$ i rasejano električno polje $\mathbf{E}_s^{(2)}$. Postupak se potom ponavlja sve do konvergencije rešenja.

Zadatak: Primena DBIMa za određivanje sastava homogenog objekta



Slika 4.6. Model u programu WIPL-D za iterativnu procenu permitivnosti tela.

U programu WIPL-D napraviti dielektrično telo u obliku kocke, stranice $a = 87 \text{ mm}$. Kocka je napravljena od homogenog dielektričnog materijala kompleksne permitivnosti $\epsilon_r = 3 - j$. Kocka je okružena antenskim nizom koji radi na učestanosti $f = 1 \text{ GHz}$. Antene su ravnomerno raspoređene u četiri koncentrična kruga, poluprečnika $R = 0.3 \text{ m}$. U svakom krugu nalazi se 36 kratkih dipola dužine kraka $h = \lambda / 20$, gde je λ talasna dužina u vakuumu.

Kružni nizovi se nalaze se na visinama $z_1 = 1.5h$, $z_2 = 4.5h$, $z_3 = -1.5h$, $z_4 = -4.5h$. Implementirati algoritam na sledeći način:

- **Prva iteracija**

- Generisati WIPL-D model u kome je početna permitivnost tela $\epsilon_r^{(0)} = 1$.
- Proračunati blisko polje u mreži tačaka:
 $x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = -0.5a$, $x_{\max} = y_{\max} = z_{\max} = 0.5a$, $N_x = N_y = N_z = 5$.
- Proračunati približno rasejano polje na mestu prijemne antene
 $E_s(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\left(\frac{Z_{ij}}{Z_{ij}h} - \frac{Z_{ij}^{(0)}}{Z_{ij}^{(0)}h} \right)$, gde je $\mathbf{Z}^{(0)}$ matrica impedansnih parametara u sredini $\epsilon_r^{(0)}$, a \mathbf{Z} matrica impedansnih parametara dobijenih "merenjima".
- Za svaku tačku, za svaku pobudu, proračunati Grinovu funkciju u sredini $\epsilon_r^{(0)}$:
 $G_{zz}(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_l, \epsilon_r^{(0)}) = E_z(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_l, \epsilon_r^{(0)}) Z_{ll}^{(0)} / h$, gde je \mathbf{r}_l pozicija pobudene antene, a x_i, y_j, z_k koordinate tačke na mreži.
- Formirati sistem jednačina, smatrajući da je telo napravljeno od homogenog dielektrika.

$$\begin{bmatrix} E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\ E_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ E_s(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{V_{ijk}} G_{zz}(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_1, \epsilon_r^{(0)}) E_z(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_1, \epsilon_r^{(0)}) \Delta V \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{V_{ijk}} G_{zz}(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_2, \epsilon_r^{(0)}) E_z(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_1, \epsilon_r^{(0)}) \Delta V \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{V_{ijk}} G_{zz}(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_M, \epsilon_r^{(0)}) E_z(x_i, y_j, z_k; \mathbf{r}_M, \epsilon_r^{(0)}) \Delta V \end{bmatrix} \tau^{(1)}.$$

- Primenom metode najmanjeg kvadrata odrediti $\tau^{(1)}$.

- **Druga iteracija**

- Ažurirati permitivnost tela $\epsilon_r^{(1)} = \epsilon_r^{(0)} + \tau^{(1)}$.
- Ponoviti sve tačke iz prethodne iteracije za novu permitivnost.

- **Ponoviti postupak dok rešenje ne iskonvergira.**

U tabeli 4.1 prikazane su permitivnosti dobijene u različitim iteracijama.

Tabela 4.1. Procena permitivnosti tela algoritmom DBIM.

Iteracija	1	2	3	4
ϵ_r	1 - j0	2.11 - j0.94	2.92 - j1.12	3 - j

Literatura

- [1] M. Pastorino, *Microwave Imaging*, J. Wiley, Hoboken, NJ, 2010.
- [2] L. E. Larsen, J. H. Jacobi, *Medical Applications of Microwave Imaging*, IEEE, Piscataway, NJ, 1986.
- [3] A. R. Dorđević, *Elektromagnetika*, Akademska misao, Beograd, 2008.
- [4] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1995.
- [5] B. M. Kolundžija, J. S. Ognjanović, T. K. Sarkar, D. S. Šumić, M. M. Paramentić, B. B. Janić, D. I. Olćan, D. V. Tošić, M. S. Tasić, *WIPL-D Microwave: Circuit and 3D EM Simulation for RF & Microwave Applications*, Artech House, Norwood, MA, 2006.

Izdavač

Akademski misao

Primorska 21, Beograd

Tel.: +381 11 3218 354

Fax: +381 63 298 027

Marko Vujadinović dipl. el. inž.

+381 63 30 10 75

marko.vujadinovic@akademski-misao.rs

Aleksandar Rašković, dipl. el. inž.

+381 63 30 10 65

sasa.raskovic@akademski-misao.rs

www.akademski-misao.rs
office@akademski-misao.rs

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

528.8.042:537-962
004.932

СТЕВАНОВИЋ, Марија, 1976-

Mikrotalasno formiranje slike = Microwave
Imaging / Marija Stevanović. - Beograd :
Akademski misao, 2016 (Beograd : Akademski
misao). - 60 str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 100. - Bibliografija: str. 60.

ISBN 978-86-7466-619-7

a) Микроталасна техника - Дигитална обрада
слике
COBISS.SR-ID 225489164
