Сингуларна декомпозиција (SVD)

Ортогонални вектори

За пар вектора $\mathbf{x} \in \mathrm{C}^{m\times 1}$ и $\mathbf{y} \in \mathrm{C}^{m\times 1}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

се каже да су ортогонални ако је испуњено $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = 0$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1^* & \dots & x_m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* y_i = 0\,, \tag{2}$$

где H означава операцију конјуговања и транспоновања матрице или вектора.

Унитарна матрица

Квадратна матрица $\mathbf{Q} \in \mathrm{C}^{m\times m}$ је унитарна (*unitary*) ако важи $\mathbf{Q}^{\mathrm{H}} = \mathbf{Q}^{-1}$, односно $\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$,

где је $\mathbf{I}$ јединична (*indentity*) матрица.

Ако се матрица $\mathbf{Q}$ напише у виду колона вектора

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

следи да је

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_2^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_2 & & \mathbf{q}_2^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_m^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}\,. \tag{4}$$

На основу (4), следи да је неопходан услов да би матрица била унитарна је да њене колоне буду ортонормални вектори, односно

$$\mathbf{q}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{q}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots m\,, \tag{5}$$

где је δ_{ij} Кронекерова делта

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{6}$$

Сингуларна декомпозиција

Нека је $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{m \times n}$ правоугаона матрица, где су m и n произвољни цели бројеви. Сингуларна декомпозиција матрице $\mathbf{A}$ је

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\mathrm{H}}, \tag{7}$$

где је

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m], \tag{8}$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n], \tag{9}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_p & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Матрице $\mathbf{U} \in \mathrm{C}^{m \times m}$ и $\mathbf{V} \in \mathrm{C}^{n \times n}$ су унитарне матрице, а матрица $\mathbf{\Sigma} \in \Re^{m \times n}$ је дијагонална матрица. Дијагонални елементи матрице $\mathbf{\Sigma}$ се називају сингуларне вредности. Сингуларне вредности су ненегативни бројеви који су поређани по опадајућем редоследу $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_p \geq 0$, где је $P = \min(m, n)$. У развијеном облику, сингуларна декомпозиција гласи

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{H}}. \tag{11}$$

Особине сингуларне декомпозиције

Једноставним трансформацијама се показује да важе следећи идентитети

$$\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{H} \mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j, \tag{12}$$

$$\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j, \tag{13}$$

$$\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \mathbf{L}^{\mathrm{H}}(\mathbf{L}\mathbf{v}_j) = \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\sigma_j \mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_j, \tag{14}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j = \mathbf{L}(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j) = \mathbf{L}\sigma_j \mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{L}\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{u}_j, \tag{15}$$

при чему је коришћено својство ортонормалности сингуларних вектора

$$\mathbf{v}_i^{H} \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \tag{16}$$

$$\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \delta_{ij}. \tag{17}$$

Главне особине сингуларне декомпозиције су сумиране у табели испод.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j \\ &\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j \\ &\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_j \\ &\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_j = \sigma_j^2 \mathbf{u}_j \end{aligned}}$$

Декомпозиција вектора

Сингуларном декомпозицијом произвољне правоугаоне матрице $\mathbf{L} \in C^{M \times N}$ добијамо два скупа ортонормалних вектора, $\mathbf{u}_j \in C^{M \times 1}$, $j = 1, \ldots, M$, и $\mathbf{v}_i \in C^{N \times 1}$, $i = 1, \ldots, N$.

Вектори $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{v}_i$ дефинишу базе простора $C^{M \times 1}$ и $C^{N \times 1}$, респективно. То значи да сваки *M*-димензионални вектор може да се представи помоћу линеарне комбинације вектора $\mathbf{u}_j$, на исти начин као што сваки вектор у тродимензионалном (3D) простору може да се представи линеарном комбинацијом ортова $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ и $\mathbf{i}_z$. У 3D простору имамо

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z , \tag{18}$$

где су A_x, A_y и A_z пројекције вектора $\mathbf{A}$ на одговарајуће ортове

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_x , \; A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_y , \; A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_z . \tag{19}$$

Слично, за произвољни вектор $\mathbf{g} \in C^{M \times 1}$ можемо да напишемо

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{M} g_i \mathbf{u}_i , \tag{20}$$

где су коефицијенти g_i пројекције вектора $\mathbf{g}$ на јединичне векторе $\mathbf{u}_i$. Коефицијенти g_i се стога добијају као скаларни производ вектора $\mathbf{g}$ и $\mathbf{u}_i$

$$g_i = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{g} . \tag{21}$$

Наиме

$$\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{M} g_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{u}_i = g_i . \tag{22}$$

Слично, вектор $\mathbf{f} \in C^{N \times 1}$ можемо да представимо сумом

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{N} f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i . \tag{23}$$

Декомпозиција матрица и вектора су сумиране у табели испод.

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{M} g_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{M} \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{N} f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{H}}$$

Решавање система линеарних једначина

Посматрамо систем линеарних једначина

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \tag{24}$$

где је $\mathbf{f} \in C^{N\times 1}$ непознати вектор, $\mathbf{g} \in C^{M\times 1}$ познати вектор и $\mathbf{L} \in C^{M\times N}$ матрица система. Када су инверзни проблеми у питању, број непознатих величина се најчешће разликује од броја једначина, односно $M \neq N$. Због тога систем не можемо да решимо инвертовањем матрице, односно не важи $\mathbf{f} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{g}$ јер $\mathbf{L}$ није квадратна матрица.

Приближно решење можемо да добијемо минимизирањем средње квадратне грешке између модела и мерења, $\|\mathbf{L}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$. Диференцирањем квадратне грешке по непознатом вектору $\mathbf{f}$ и потом изједначавањем добијеног резултата са нулом добија се

$$\left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\right)\mathbf{f} = \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{g}, \tag{25}$$

односно

$$\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{g}. \tag{26}$$

Применом сингуларне декомпозиције показаћемо зашто добијено решење није стабилно. Посматрајмо најпре леву страну једнакости (25). На основу особина сингуларне декомпозиције имамо

$$\left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\right)\mathbf{f} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\right)\sum_{i=1}^{N} f_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} f_i \left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L}\right)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{P} f_i \sigma_i^2 \mathbf{v}_i, \tag{27}$$

где је $P = \min(M, N)$. На сличан начин, десна страна једнакости постаје

$$\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{g} = \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\sum_{i=1}^{M} \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{M} \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{P} \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \sigma_i \mathbf{v}_i. \tag{28}$$

Изједначавањем (27) и (28) добија се

$$f_i \sigma_i^2 = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle \sigma_i, \tag{29}$$

односно

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_i \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \, . \tag{30}$$

Решење са најмањим квадратним одступањем је нумерички неповољно због преовлађујућег утицаја чланова са малим сингуларним вредностима. Наиме, мале сингуларне вредности потичу од шума. Како се сингуларне вредности у суми (30) јављају у облику $1/\sigma_i$, она дивергира, односно, $\|\mathbf{f}\| \to \infty$. Због тога, да би се избегла дивергенција решења, уводе се технике регуларизације којима се постиже нумеричка стабилност.

Тихоновљева регуларизација

Решење система једначина (24) може да се стабилизује уколико се минимизира следећа функција

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2 \, , \tag{31}$$

где поред квадратне грешке постоји и квадратна норма решења $\|\Delta\mathbf{f}\|_2^2$. Коефицијент λ дефинише баланс између две квадратне норме. Увођењем другог члана ограничава се квадратна норма решења, односно спречава његова дивергенција. Овај метод стабилизације назива се Тихоновљева регуларизација. Решење које се добија овим поступком гласи

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{L} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{L}^{\mathrm{H}}\mathbf{g} \, , \tag{32}$$

где је $\mathbf{I}$ јединична матрица. Применом сингуларне декомпозиције, (32) се може изразити у облику

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \left(\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{g}\right) \mathbf{v}_i \, . \tag{33}$$

Коефицијент λ треба да одабрати тако да буде значајно мањи од највеће сингуларне вредности. У том случају следи да је

$$\sigma_i >> \lambda \Rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \to \frac{1}{\sigma_i} \, , \tag{34}$$

односно да коефицијент λ практично не утиче на чланове који потичу од великих сингуларних вредности. Код малих сингуларних вредности је

$$\sigma_i << \lambda \Rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \to \frac{\sigma_i}{\lambda^2} \to 0 \, , \tag{35}$$

због чега је утицај шума минимизиран.

Скраћена сингуларна декомпозиција

Стабилизација решења (24) може да се изврши и помоћу такозване скраћене сингуларне декомпозиције (*truncated singular value decomposition*). У овој методи се, уместо свих сингуларних вредности, користи само *K* највећих. Решење у овом случају гласи

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sigma_i} \left(\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{g}\right) \mathbf{v}_i \, , \tag{36}$$

Индекс највеће значајне сингуларне вредности (*K*) обично добијамо из услова $\sigma_K = 0.01\sigma_1$. Наравно, могуће је усвојити и друге вредности за праг.

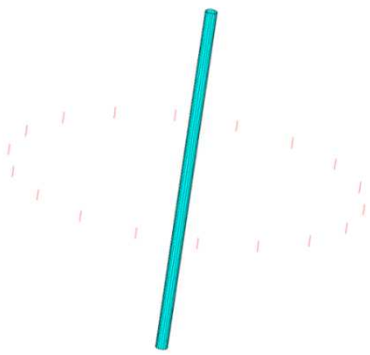
Нажалост ниједан вид регуларизације није оптималан за све врсте проблема. У формирању микроталасних слика, Тихоновљева регуларизација и скраћена сингуларна декомпозиција су погодне у случају када расејач заузима значајан део простора претраживања. Такође, ове методе су подесне и код добијања слика глатких објеката јер се понашају као нископропусни филтри.

Задатак: Илустрација сингуларне декомпозиције

На примеру дугачког цилиндра, показати како број сингуларних вредности мултистатичке матрице података зависи од димензија расејача. Мултистатичка матрица података се дефинише

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} \Delta S_{11} & \cdots & \Delta S_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta S_{M1} & \dots & \Delta S_{MM} \end{bmatrix}, \tag{37}$$

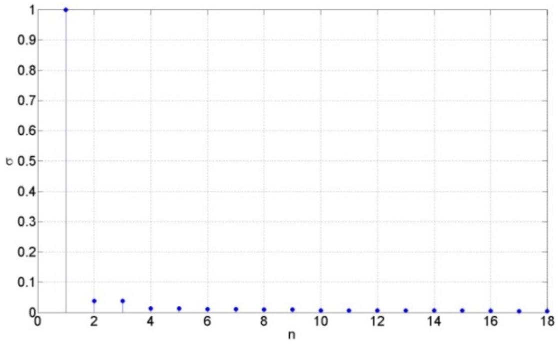
где је ΔS_{ij} разлика коефицијента трансмисије између i-те и j-те антене, прорачунатих са и без расејача, респективно.



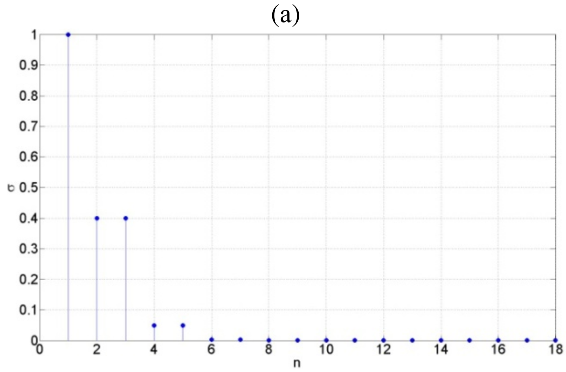
Слика 1. Метални цилиндар у присуству кружног антенског низа.

- У програму WIPL-D направити кружни низ полуталасних дипола у чијем се центру налази метални цилиндар, као на слици 1.
- Полупречник низа је $R = 0{,}75\ \mathrm{m}$, а радна учестаност $f = 2\ \mathrm{GHz}$.
- Висина цилиндра је $H = 1\,\mathrm{m}$, а полупречник кружне основе је a. Испитати случајеве: $\beta a = 0{,}1$, $\beta a = 1$ и $\beta a = 2$, где је $\beta = 2\pi/\lambda$ фазни коефицијент.
- Направити идентичан модел претходном и из њега уклонити цилиндар.
- Из оба модела учитати матрицу расејања, и на основу њихове разлике одредити мултистатичку матрицу података.
- Сингуларну декомпозицију матрице **L** одредити помоћу наредбе $[\mathbf{U} \quad \mathbf{\Sigma} \quad \mathbf{V}] = \mathrm{svd}(\mathbf{L})$ у програму Matlab/Octave.
- Наредбом $\sigma = \mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma})$ издвојити сингуларне вредности из дијагоналне матрице $\mathbf{\Sigma}$.
- Нацртати сингуларне вредности за сваку вредност полупречника цилиндра.

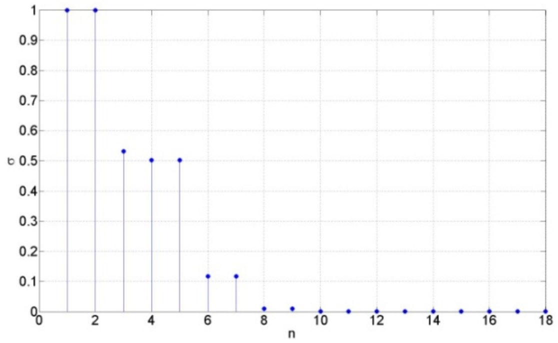
Очекивани резултати су приказани на слици 2. Са слике се види да број значајних сингуларних вредности расте са полупречником цилиндра.



(а)



(б)



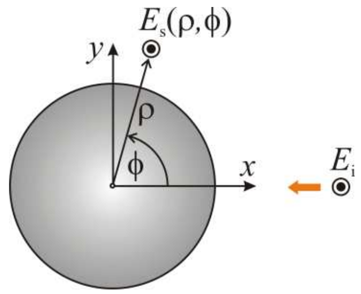
(в)

Слика 2. Нормализоване сингуларне вредности матрице $\mathbf{L}$ *добијене у случајевима (а)* $\beta a = 0{,}1$ *, (б)* $\beta a = 1$ *и (в)* $\beta a = 2$.

Објашњење за пораст број сингуларних вредности са повећањем димензија цилиндра следи из аналитичких израза за расејање равног таласа од бесконачно дугачког савршено проводног цилиндра. У случају када талас наилази из негативног смера x-осе, а правац вектора инцидентног електричног поља се поклапа са z-осом, расејано електрично поље може да се представи помоћу суме

$$E_{\mathrm{s}}(\rho,\phi) = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}, \tag{38}$$

где је E_0 ефективна вредност инцидентног електричног поља, J_n Беселова функција прве врсте и n-тог реда, $H_n^{(2)}$ Ханкелова функција друге врсте и n-тог реда. Попречни пресек цилиндра и одговарајући координатни систем су приказани на слици 3.



Слика 3. Расејено електрично поље бесконачно дугачког металног цилиндра.

У зони зрачења важи апроксимација,

$$H_n^{(2)}(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi\beta\rho}}\,\mathrm{j}^n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\rho}\,, \tag{39}$$

одакле имамо

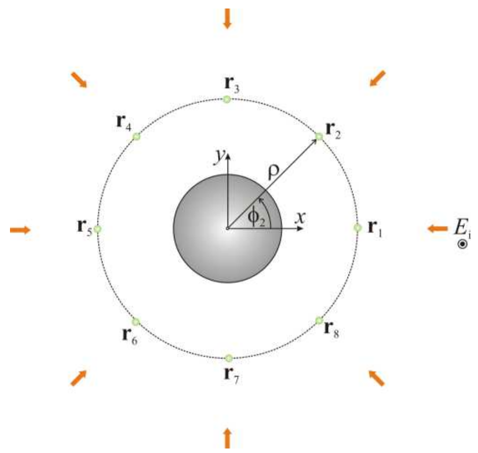
$$E_s(\rho,\phi) \approx K \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}\,,\ K = -E_0\sqrt{\frac{2j}{\pi\beta}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\rho}}{\sqrt{\rho}}\,,\ c_n = \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)}\,. \tag{40}$$

Може се показати да су доприноси чланова чији је индекс већи од $n_{\max} = 2\beta a$ занемарљиви па (40) постаје

$$E_s(\rho,\phi) \approx K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\phi}\,, \tag{41}$$

Посматрајмо сада мерну конфигурацију као на слици 4. Цилиндар је окружен низом антена које се налазе на позицијама $\mathbf{r}_i = (\rho,\phi_i)$, $i = 1,\ldots,M$. Поље које мери *i*-та антена када је *j*-та антена предајна је приближно

$$E_s(\phi_j,\phi_i) = K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\phi_j-\phi_i)}\,, \tag{42}$$



Слика 4. Мерна конфигурација.

Мултистатичка матрица података гласи

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} E_s(\phi_1, \phi_1) & \dots & E_s(\phi_1, \phi_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_s(\phi_M, \phi_1) & \dots & E_s(\phi_M, \phi_M) \end{bmatrix} = K \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} c_n \begin{bmatrix} e^{jn(\phi_1-\phi_1)} & \dots & e^{jn(\phi_1-\phi_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jn(\phi_M-\phi_1)} & \dots & e^{jn(\phi_M-\phi_M)} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Дефинишимо векторе

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} e^{jn\phi_1} & \dots & e^{jn\phi_M} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \ -n_{\max} \le n \le n_{\max} . \tag{44}$$

Вектори су ортонормални, односно важи

$$\mathbf{u}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{u}_n = \delta_{kn} , \ -n_{\max} \le k, n \le n_{\max} , \tag{45}$$

На основу (43)-(44), матрицу мерења можемо да запишемо у облику

$$\mathbf{L} = \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} (KMc_n) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H . \tag{46}$$

Са друге стране, сингуларна декомпозиција матрице $\mathbf{L}$ гласи

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H . \tag{47}$$

Поређењем (46) и (47), закључујемо да су:

- KMc_n сингуларне вредности матрице $\mathbf{L}$,
- $\mathbf{u}_n$ сингуларни вектори матрице $\mathbf{L}$.

Да би се реконструисало расејано поље цилиндра потребно је познавати сингуларне вредности c_n . Стога, број антена мора да задовољи услов $M > 2n_{\max} + 1$.