Методе засноване на дискретизацији једначине расејања

У претходном одељку смо показали да је пренос између две антене, услед присуства расејача, приближно једнак

$$\Delta s_{ij} \approx k \int_{v'} \Delta\varepsilon(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathrm{r}', \mathbf{r}_j) \mathrm{d}v', \tag{1}$$

где је

- $\mathbf{r}'$ вектор положаја произвољне тачке у објекту,
- v' домен који заузима објекат,
- $\mathbf{r}_i$ вектор положаја пријемне антене,
- $\mathbf{r}_j$ вектор положаја предајне антене,
- $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i)$ вектор електричног поља које у тачки $\mathbf{r}'$ ствара *i*-та антена када је објекат уклоњен,
- $\Delta\varepsilon(\mathbf{r}') = \varepsilon(\mathbf{r}') - \varepsilon_{\text{b}}(\mathbf{r}')$ разлика пермитивности објекта и околине у тачки $\mathbf{r}'$ (контраст),
- $k = -\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2a_i a_j}$ константа пропорционалности, приближно иста за све примопредајне парове код антенских низова састављених од идентичних антена.

У једначини преноса, непозната је разлика пермитивности $\Delta\varepsilon$, као и домен који заузима објекат, v'. Облик објекта дефинисан је доменом v'. За одређивање домена v', потребно је да се дефинише простор претраживања, *D*. То је област за коју смо сигурни да обухвата објекат у целости, $v' \subseteq D$. У тродимензионалним проблемима, обично се усваја да је простор претраживања паралелепипед. Ради добијања нумеричког решења, потребно је поделити простор претраживања на елементарне запремине (векселе). Елементарна запремина је довољно мала да су у њој и контраст и инцидентно поље приближно константни. У дискретном облику, једначина преноса гласи

$$\Delta s_{ij} \approx k \sum_{l=1}^{L} \Delta\varepsilon_l \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_j) \Delta v, \tag{2}$$

где је $\mathbf{q}_l$ вектор положаја центра *l*-тог воксела, $\Delta\varepsilon_l$ контраст *l*-тог воксела, Δv запремина воксела и L укупан број воксела. У једначини (2), непознате величине су коефицијенти $\Delta\varepsilon_l$, $l = 1, \ldots, L$. Уколико *l*-ти воксел припада објекту, тада је $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{\text{b}}$. У супротном, $\Delta\varepsilon_l$ је нула. Наравно, унапред се не зна који воксел припада објекту, па самим тим ни који су коефицијенти $\Delta\varepsilon_l$ једнаки нули.

У матричном облику (2) гласи

$$\begin{bmatrix} \Delta s_{1,1} \\ \Delta s_{1,2} \\ \vdots \\ \Delta s_{M,M} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1) & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1) & \cdots & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_1) \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_2) & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_2) & \cdots & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_M) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_M) & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_M) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{r}_M) & \cdots & \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_M) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{inc}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \vdots \\ \Delta\varepsilon_L \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где сада k укључује и запремину воксела. У компактном облику, (3) може да се запише као

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{L}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{4}$$

где је $\Delta\mathbf{s}$ вектор мерења, $\mathbf{L}$ матрица система и $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ непознати вектор. У матрици система, свака колона се односи на један воксел и представља одзив низа на елементарни расејач који се налази на месту датог воксела.

У претходном одељку је показано да систем једначина (4) не може да се реши без примене регуларизације. Решење добијено помоћу Тихоновљеве регуларизације гласи

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \left(\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \cdot \Delta\mathbf{s}\right)\mathbf{v}_i\,, \tag{5}$$

где су σ_i сингуларне вредности, а $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ сингуларни вектори матрице $\mathbf{L}$. Решење добијено помоћу скраћене сингуларне декомпозиције (TSVD) гласи

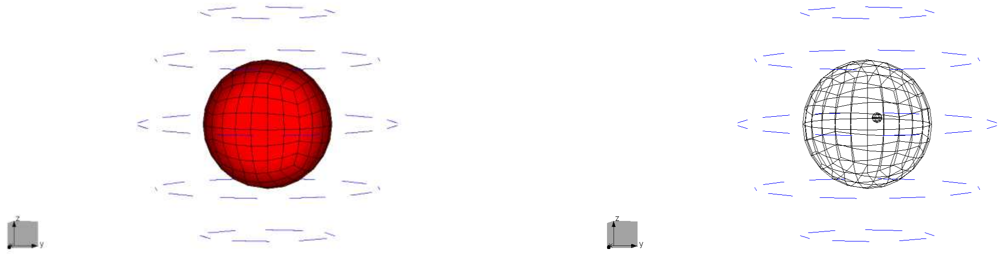
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sigma_i} \left(\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \cdot \Delta\mathbf{s}\right)\mathbf{v}_i\,. \tag{6}$$

Без обзира на технику регуларизације, решавањем система једначина (4) добијамо врло грубу расподелу пермитивности. Наиме, ове једначине су изведене под претпоставком да важи Борнова апроксимација, што је у стварности ретко испуњено. Због тога се (4) користи, пре свега, за одређивање облика непознатог објекта, а не за одређивање његовог састава. Када је од интереса и расподела пермитивности, на располагању су методе које (4) решавају итеративно, попут искривљене Борнове методе (*distorted Born iterative method*).

Такође, ниједан вид регуларизације није оптималан за све врсте инверзних проблема. Тако на пример, Тихоновљева регуларизација и TSVD су погодне у случају када расејач заузима значајан део простора претраживања. Такође, ове методе су подесне и код добијања слика глатких објеката јер се понашају као нископропусни филтри.

Пример: Одређивање локације и облика објекта помоћу методе TSVD

На слици је приказан домен у облику сфере, полупречника $a = 0{,}25\ \mathrm{m}$, који је окружен сферним низом полуталасних дипола. Диполи су равномерно распоређени по површи сфере полупречника $R = 0{,}5\ \mathrm{m}$. Укупан број дипола је $M = 44$, а њихови правци се поклапају са правцем орта $\mathbf{i}_\phi$ сферног координатног система. Сферни домен је направљен од хомогеног материјала пермитивности $\varepsilon_\mathrm{r} = 10$. У сфери се налази непознати објекат у облику сфере полупречника $a = 2\ \mathrm{cm}$. Центар сфере се налази у тачки са координатама $x_0 = 4\ \mathrm{cm}$, $y_0 = 5\ \mathrm{cm}$, $z_0 = 3\ \mathrm{cm}$. Сматрати да је мала сфера савршено проводна. Радна учестаност низа је $f = 1\ \mathrm{GHz}$. Нацрати слику објекта помоћу методе TSVD у пресеку $z = z_0$.



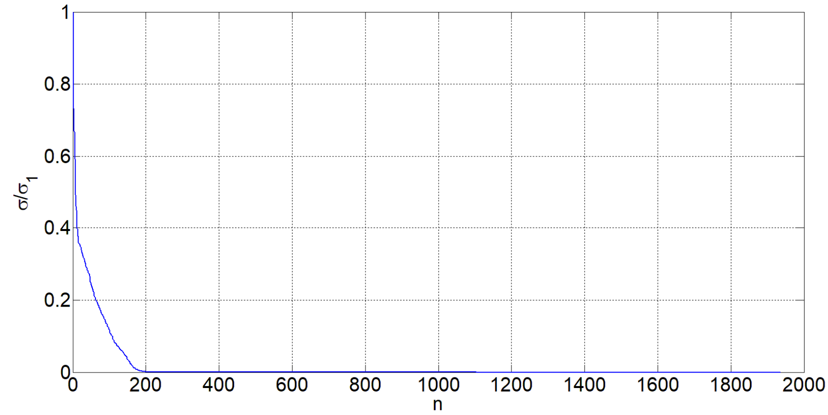
Слика 1. Модел објекта у програму WIPL-D.

У прилогу су два WIPL-D модела. Први модел, назван target.iwp, симулира експеримент. Он се састоји од антенског низа, велике диелектричне сфере која представља позадински медијум и мале металне сфере која представља објекат који испитујемо. Из њега добијамо матрицу расејања $\mathbf{S}$. Други модел, назван background.iwp је добијен из првог тако што је из њега уклоњен објекат. Из њега одређујемо одзив антенског низа у позадинском медијуму $\mathbf{S}_0$, као и инцидентно поље, $\mathbf{E}_{\text{inc}}$. Инцидентно поље се рачуна помоћу опције NEAR FIELD (блиско поље). Број тачака претраживања дуж координатних оса је: $N_x = N_y = 50$ и $N_z = 1$.

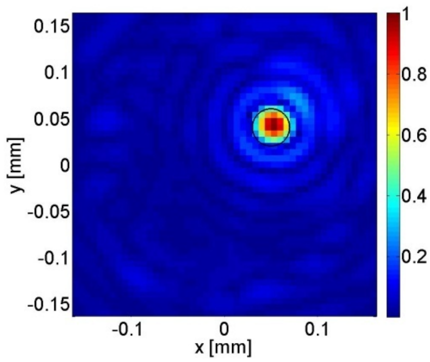
У програму Matlab/Octave написати алгоритам за добијање слике помоћу следећих корака:

- Учитати матрицу расејања у присуству објекта из фајла target.ad1.
- Учитати матрицу расејања без присуства објекта из фајла background.ad1.
- Одредити разлику матрица расејања $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S} - \mathbf{S}_0$.
- Претворити матрицу разлике расејања у вектор помоћу наредбе $\Delta\mathbf{S} = \text{reshape}(\Delta\mathbf{S}, M^2, 1)$.
- Учитати вредности вектора инцидентног поља, као и одговарајуће координате, из фајла background.nf1.
- Одредити матрицу система $\mathbf{L}$ по угледу на (3). Ставити да је $k = 1$.
- Одредити сингуларну декомпозицију матрице система помоћу наредбе $[\mathbf{U} \quad \Sigma \quad \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{L})$.
- Издвојити сингуларне вредности наредбом $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\Sigma)$.
- Одредити индекс највеће значајне сингуларне вредности (K) из услова $\sigma_K = 0.01\sigma_1$, где је σ_1 највећа сингуларна вредност.
- Израчунати непознате коефицијенте помоћу $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sigma_i} \left(\mathbf{u}_i^{\mathrm{H}} \cdot \Delta\mathbf{s}\right)\mathbf{v}_i$, где је $\mathbf{u}_i = \mathbf{U}(i,:)$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{V}(i,:)$.
- Нацртати слику објекта, односно, нормализоване вредности $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

Очекивани резултат за нормализовани график сингуларних вредности је приказан на слици 2. На слици 3 је приказана слика објекта.



Слика 2. График нормализованих сингуларних вредности.



Слика 3. Реконструкција објекта помоћу методе TSVD.