

Оптимизациона функција

- До сада смо сматрали да је позната или дефинисана **једна оптимизациона функција**
- То је тачно уколико постоји само **један критеријум оптимизације**
- Како се дефинише оптимизациона функција уколико постоји више критеријума оптимизације?
- Критеријуми могу бити по суштински различитим величинама
 - појачање и прилагођење,
 - струја/напон и физичке димензије,
 - техничке карактеристике и цена,
 - време и остварена добит,
 - број линија кода и функционалност рачунарског програма, итд.

Неки примери оптимизације са више критеријума

- Запаковати што више апликативних опција у што мањи електрични уређај
- Направити што је могуће бржи чип са што је могуће мањим Џуловим губицима
- Написати што је могуће бржи код са што мање линија кода у програмском језику
- Пронаћи оптимално управљање системом са што је могуће једноставнијим алгоритмом
- Урадити испитни задатак за што краће време, а добити највишу оцену

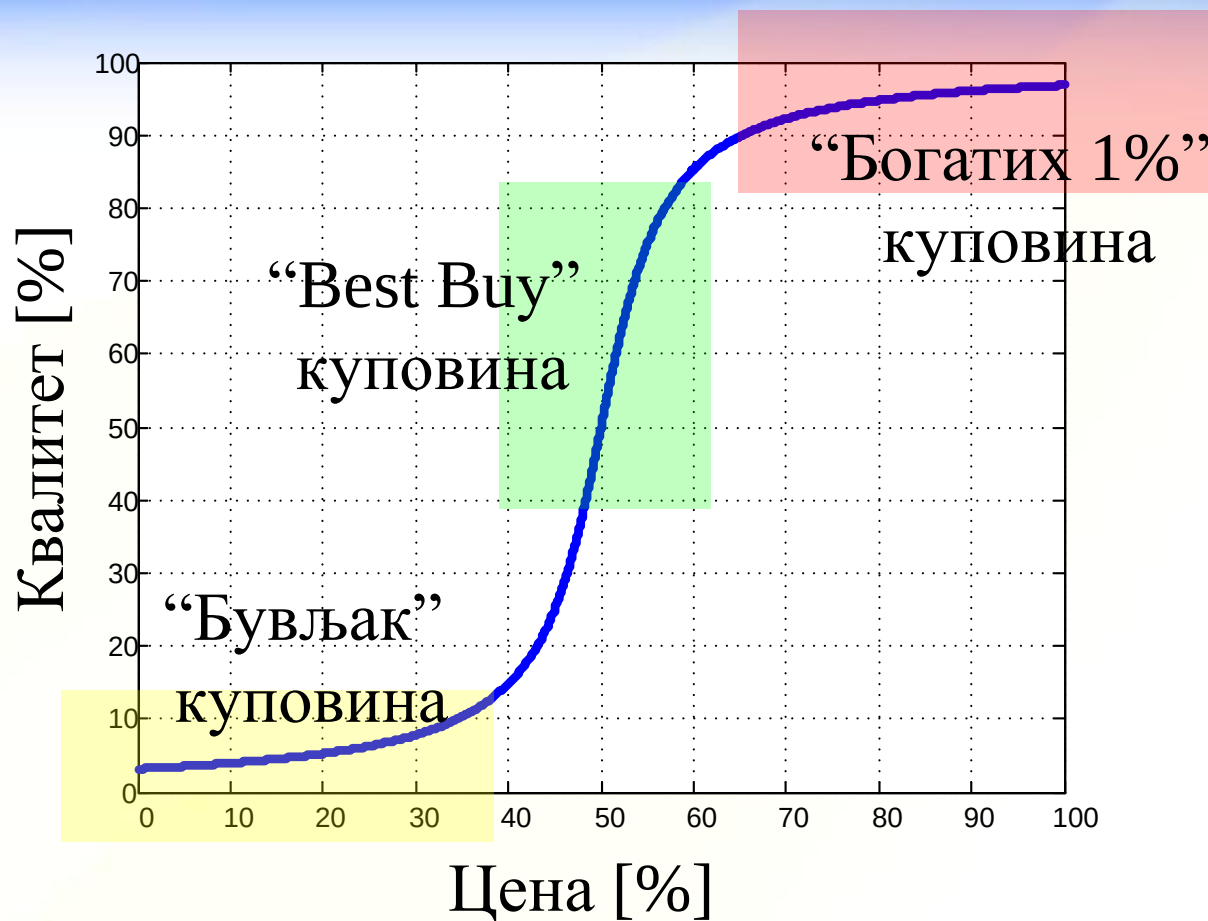
Куповина: илустративни пример супротстављених критеријума

- Посматраћемо пример куповине
- Купац, у принципу, увек води рачуна о два критеријума који су супротстављени
 - Критеријум #1: максимизирати добит (купити што квалитетније или што више)
 - Критеријум #2: минимизирати количину новца
- Да ли у таквим случајевима постоји једно најбоље (оптимално) решење?

Оптимално решење постоји само ако постоји ЈЕДАН критеријум

- Ако фиксирамо други критеријум (количину новца)
 - тада је оптимално решење оно које максимизира добит (први критеријум)
- Ако фиксирамо први критеријум (добит)
 - тада је оптимално решење оно које минимизира дату количину новца (други крит.)
- Уколико дозволимо постојање опсега вредности по оба критеријума, **нема једног оптималног решења!**

Пример из економије: зависност квалитета од цене



Теорија оптимизације са више критеријума

- Вилфредо Парето (1848–1923)
- Инжењер и економиста
- Бавио се теоријом оптимизације искоришћења ресурса у економији
- Вишекритеријумска оптимизација или парето оптимизација
- Синоними: парето скуп = парето фронт = парето граница

Дефиниција парето фронта

- Посматрамо оптимизациони проблем са G критеријума, f^k , које минимизирамо
- Формално, формирамо вектор критеријума $f = (f^1, f^2, \dots, f^G)$
- Посматрамо два (могућа) решења: f_1 и f_2
- f_1 доминира f_2 уколико $f_1^i \leq f_2^i$ за свако i и за бар једно i је $f_1^i < f_2^i$, где i иде по свих G критеријума
- Парето фронт је скуп свих решења за која не постоје (друга) доминантна решења (енглески: set of nondominated solutions)
- Парето фронт представља скуп најбољих компромиса
- Најједноставније је проверити да ли за испитивано решење постоји бар једно доминатно решење – ако постоји, онда испитивано решење није тачка парето фронта

Илустрација: скуп од 12 решења проблема са 2 критеријума

Испитивано решење

Доминантно решење

Решење за које не постоји доминантно (nondominated solution)

$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$
$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$
$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$
$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$
$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$
$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$
$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$
$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$
$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$
$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$
$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$
$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$

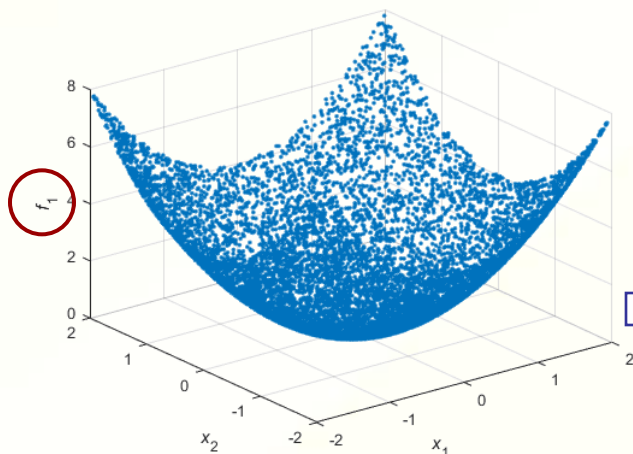
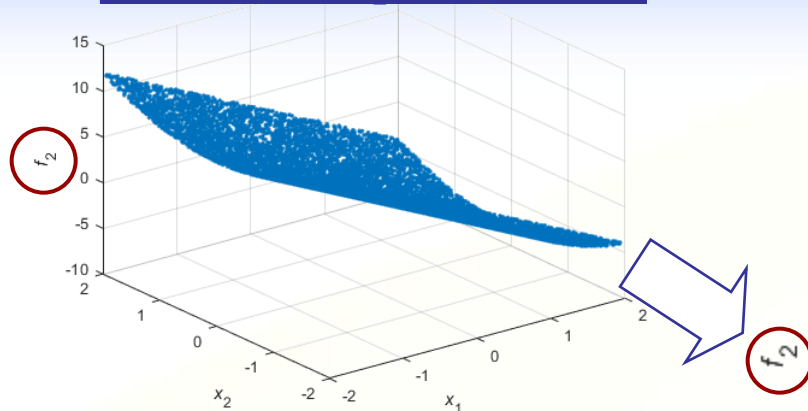
$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$	$f_{01}=(1.682, 6.283)$
$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$	$f_{02}=(4.125, 3.751)$
$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$	$f_{03}=(1.697, 5.212)$
$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$	$f_{04}=(4.699, 6.803)$
$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$	$f_{05}=(4.995, 18.992)$
$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$	$f_{06}=(0.422, 11.877)$
$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$	$f_{07}=(2.416, 9.357)$
$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$	$f_{08}=(4.721, 18.455)$
$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$	$f_{09}=(3.677, 3.134)$
$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$	$f_{10}=(1.436, 5.455)$
$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$	$f_{11}=(0.202, 11.480)$
$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$	$f_{12}=(0.265, 11.983)$

Парето фронт је...

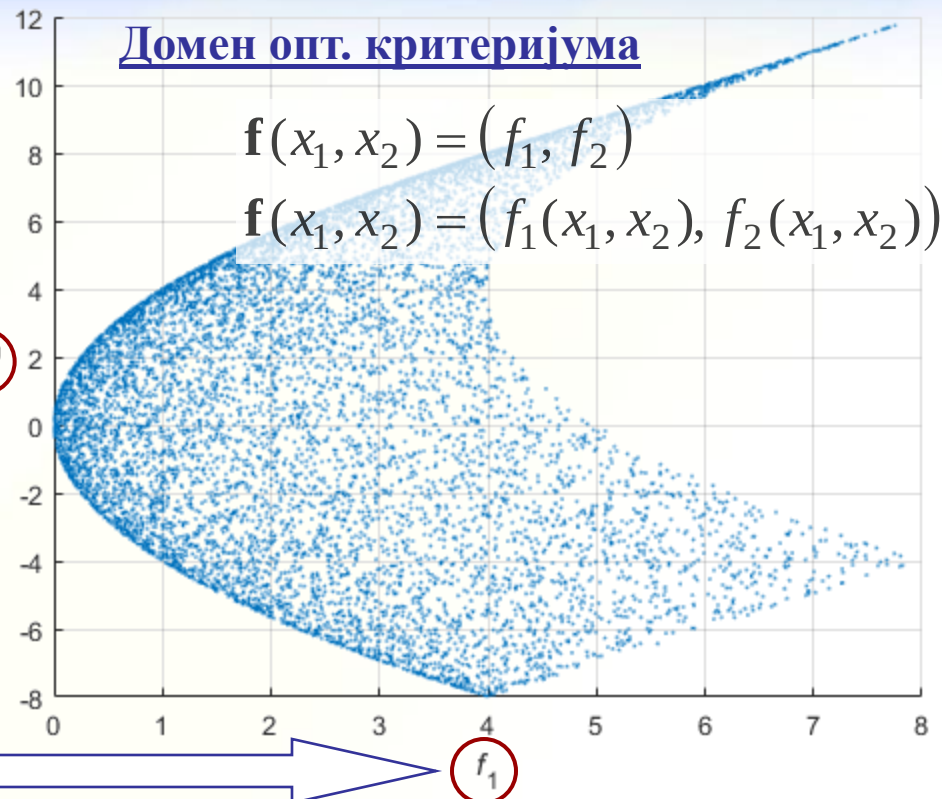
- Геометријско место тачака у простору оптимизационих критеријума чији је број димензија највише $G-1$, где је G број критеријума
 - уколико постоји 2 критеријума парето фронт је крива,
 - уколико постоји 3 критеријума парето фронт је површ,
 - уколико постоји 4 критеријума парето фронт је запремина, итд.
- Уколико постоје несупротстављени критеријуми, број димензија парето фронта се (у принципу) смањује

Домен опт. променљивих и домен критеријума

Домен опт. променљивих

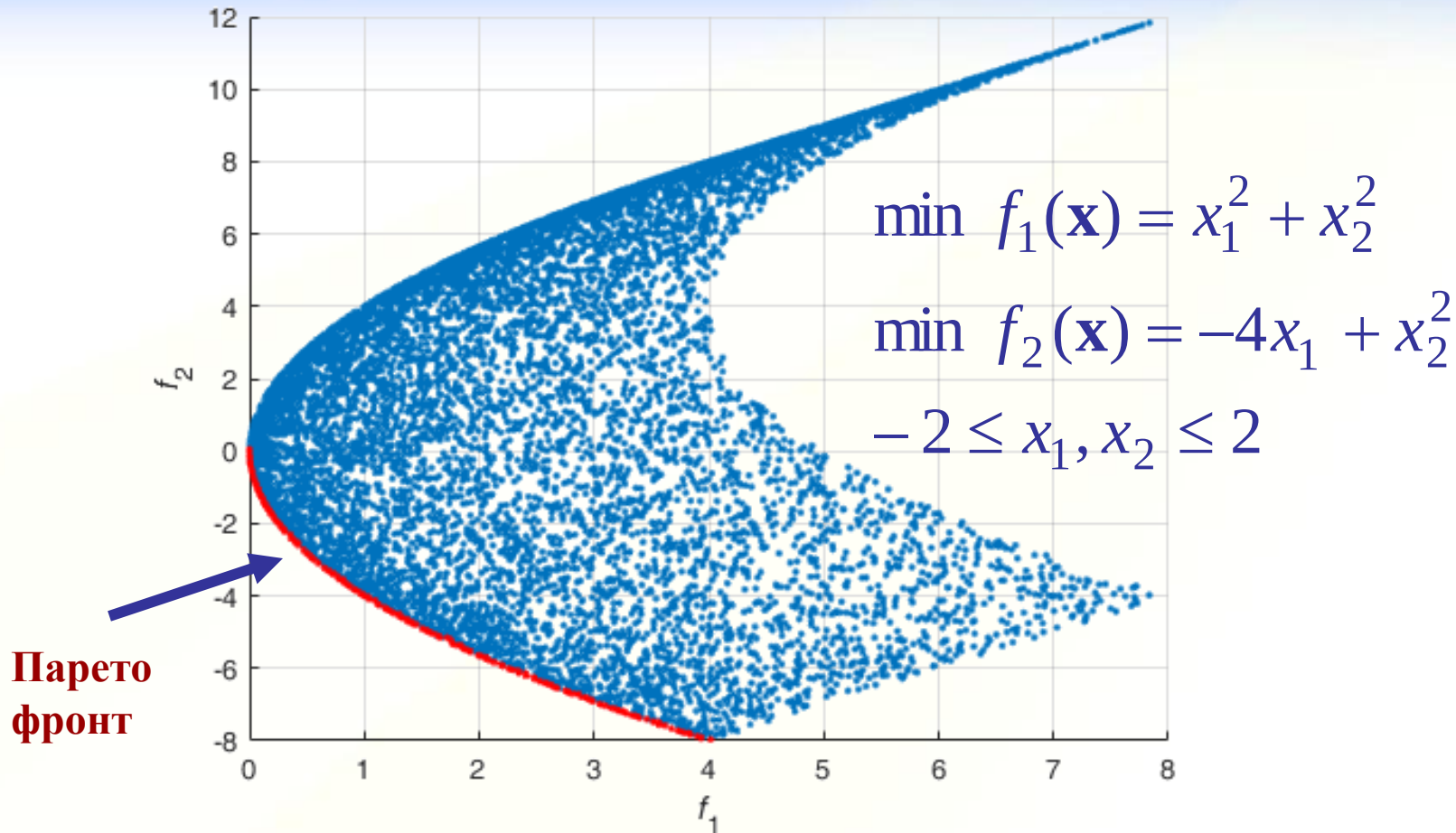


Домен опт. критеријума

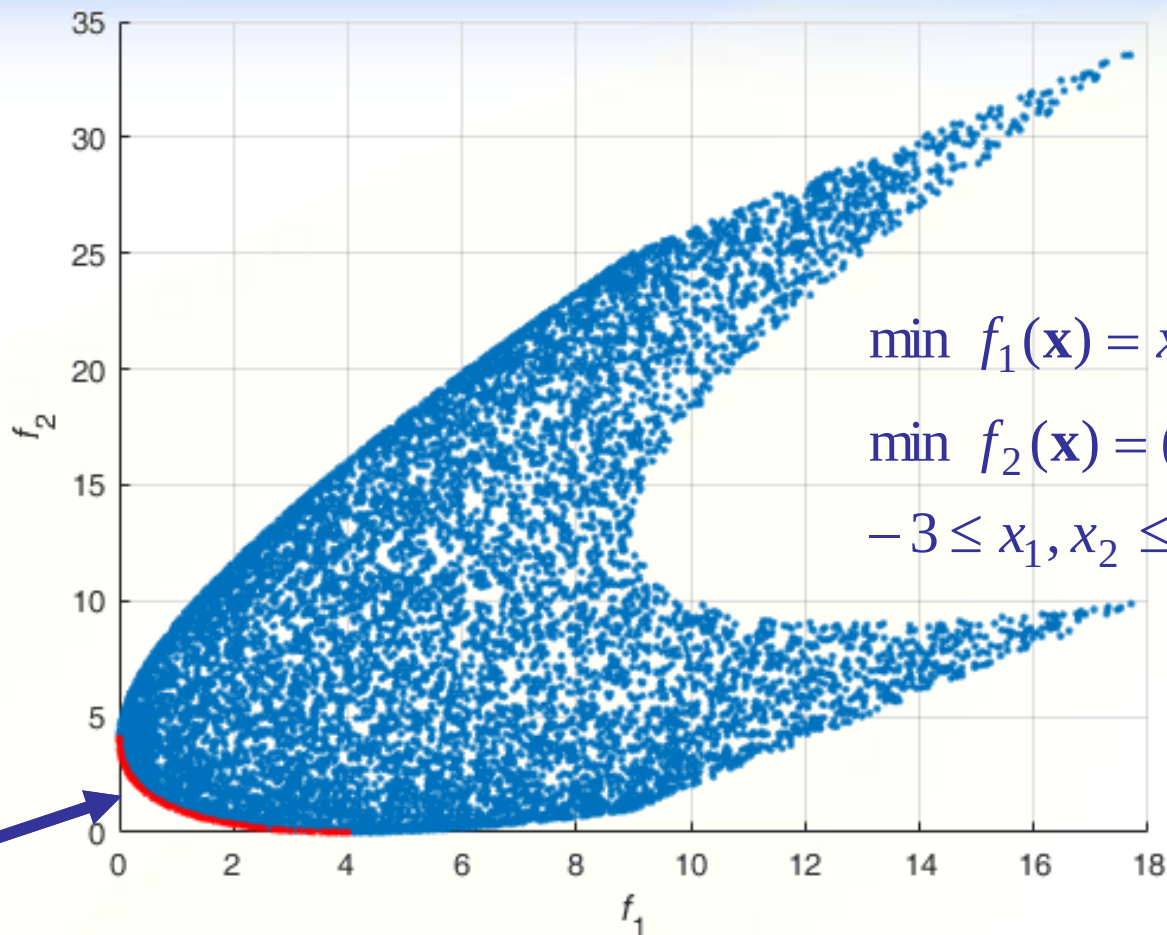


Број критеријума и број променљивих је различит у општем случају!

Пример парето фронта #1: два критеријума

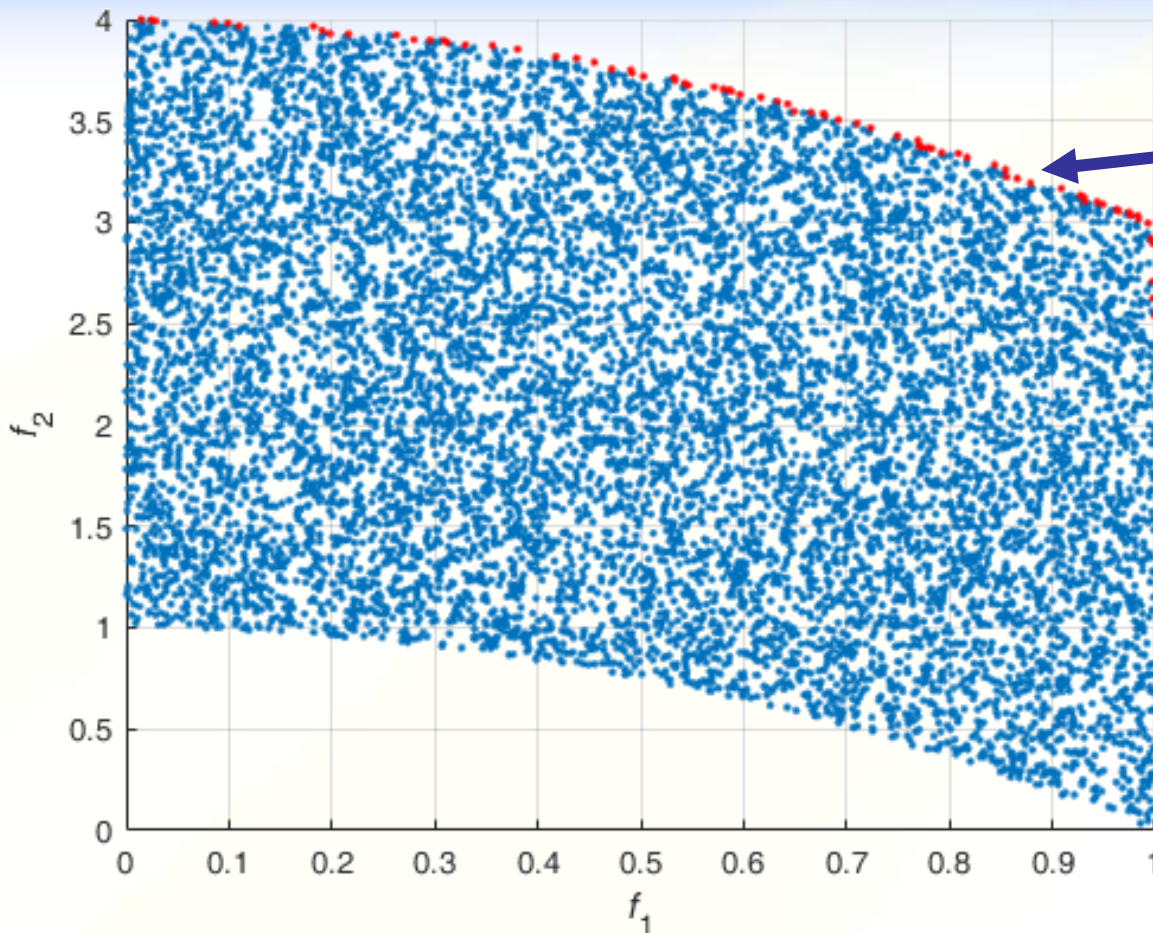


Пример парето фронта #2: два (друга) критеријума



**Парето
фронт**

Пример парето фронта #3: максимизација



**Парето
фронт**

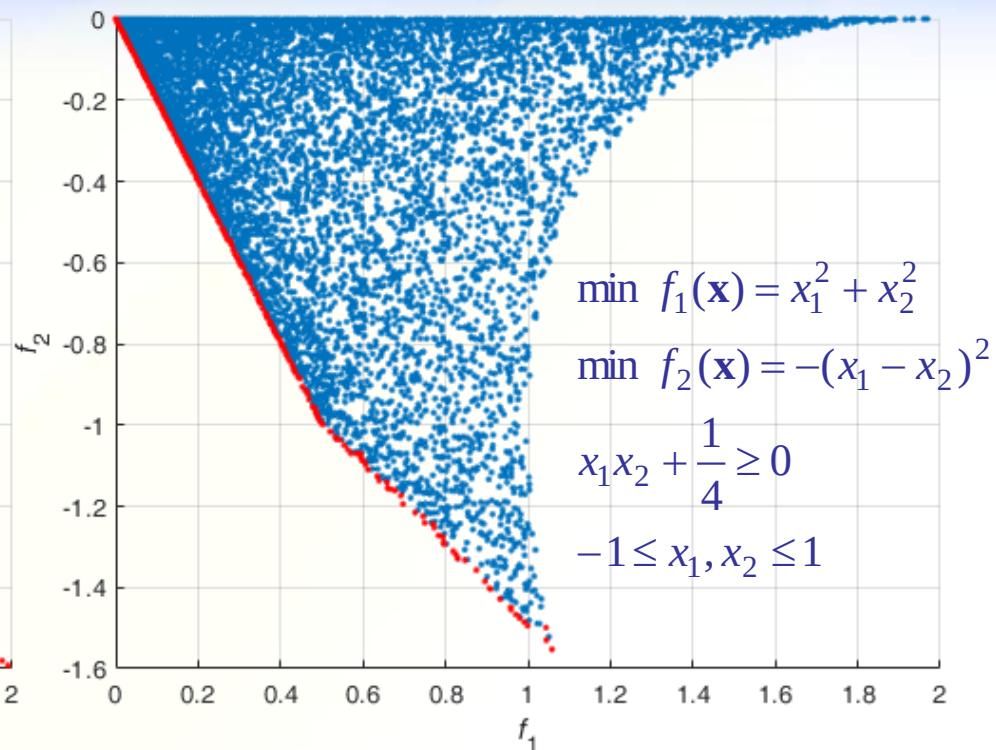
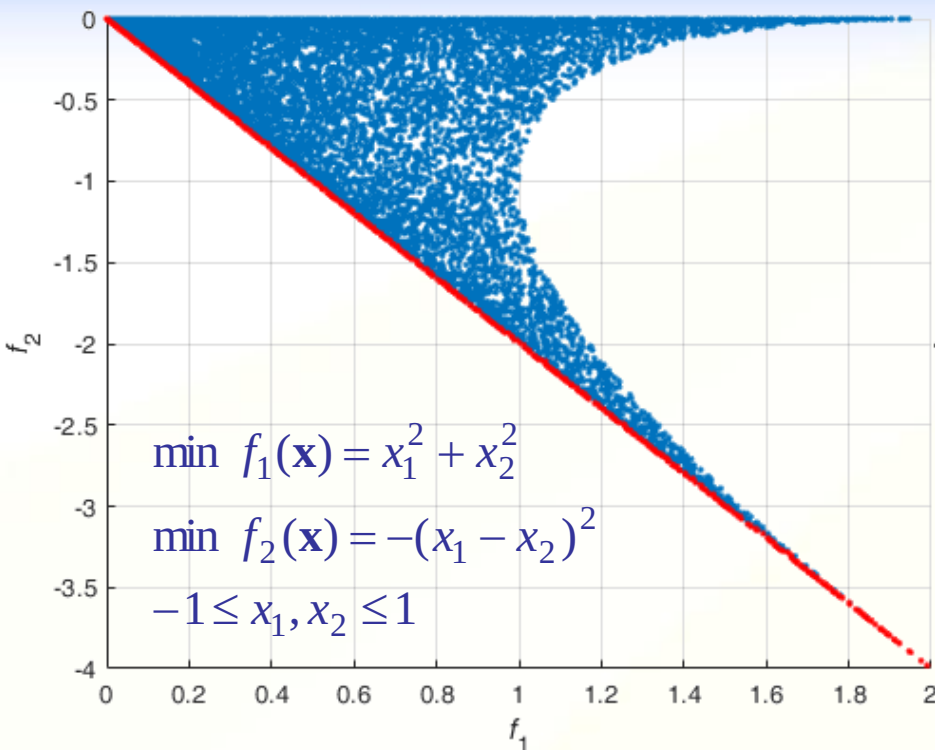
$$\max f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\max f_2(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 + x_2$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

Пример парето фронта #4: додатни услови



- Додатни услови МЕЊАЈУ парето фронт

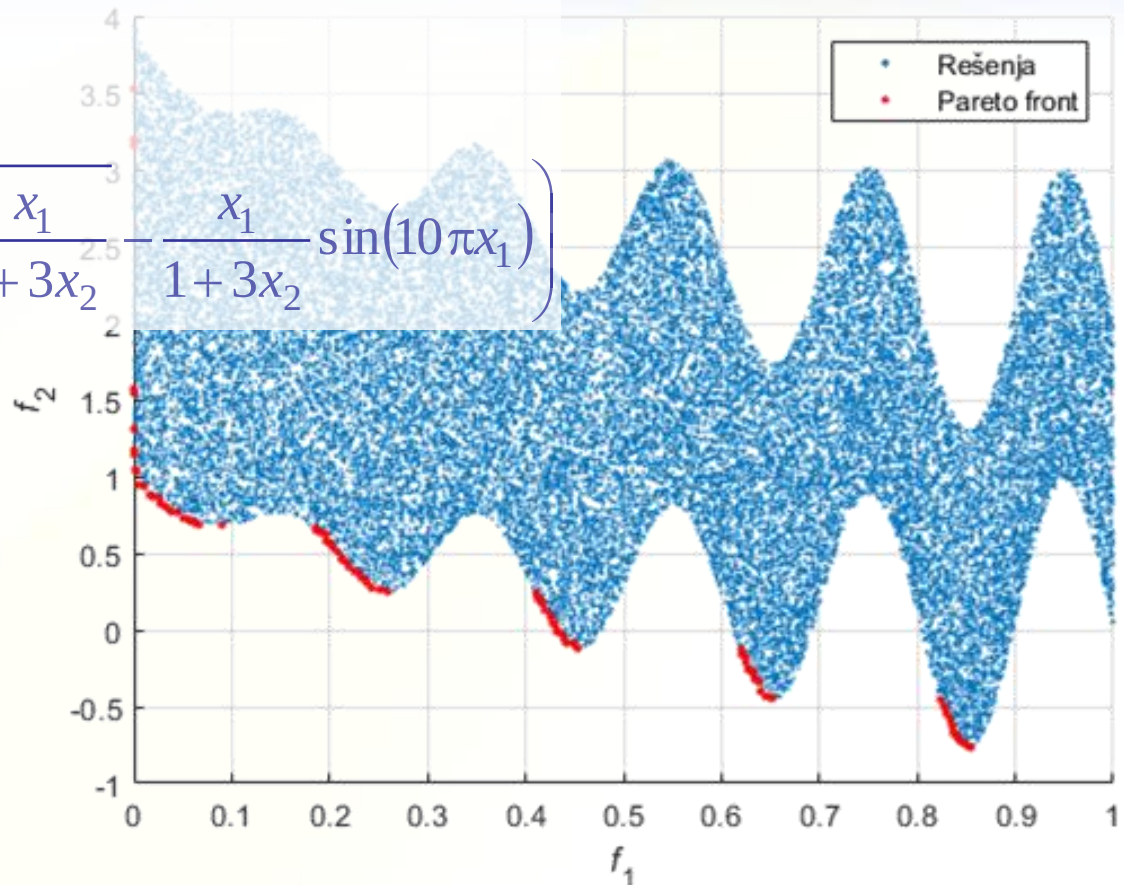
Пример парето фронта #5: фронт може имати прекиде!

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

$$\min f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\min f_2(\mathbf{x}) = (1 + 3x_2) \left(1 - \sqrt{\frac{x_1}{1 + 3x_2}} - \frac{x_1}{1 + 3x_2} \sin(10\pi x_1) \right)$$

- Парето фронт може имати прекиде!



Пример парето фронта #6: фронт може бити неконвексан

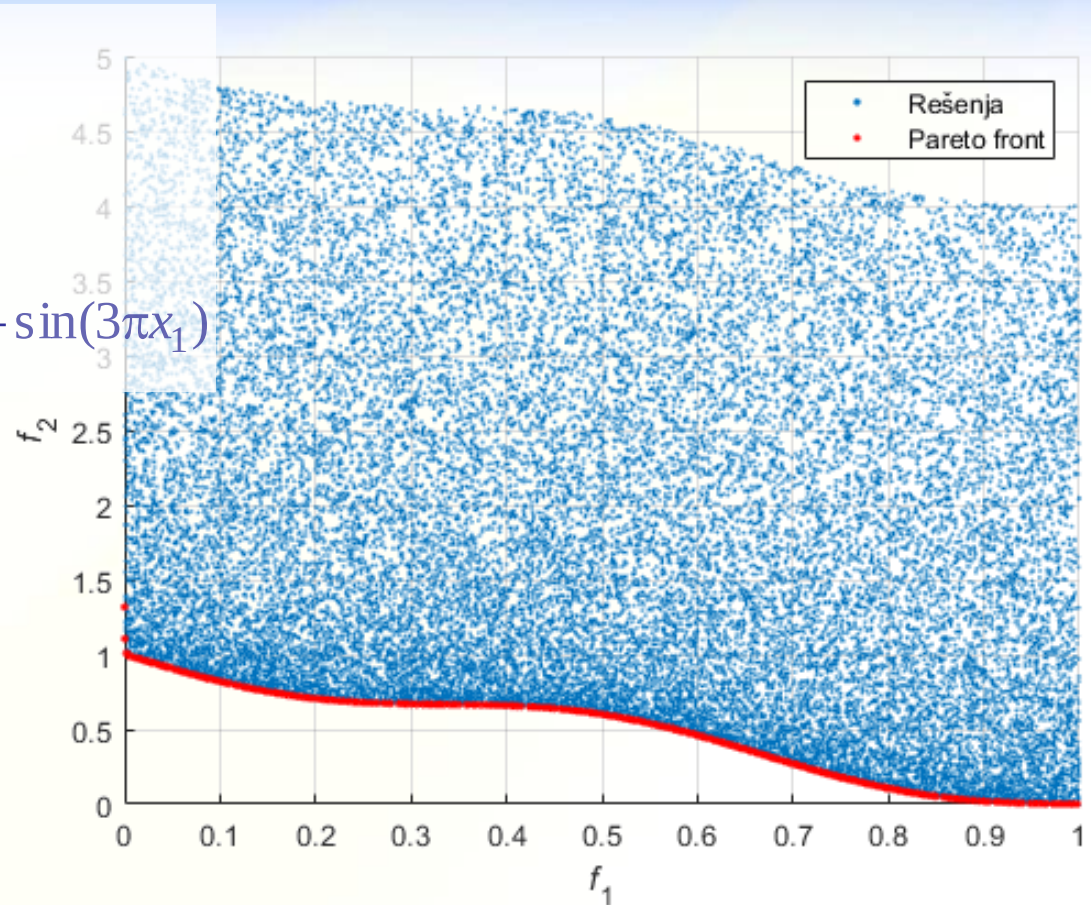
$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$-2 \leq x_2 \leq 2$$

$$\min f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\min f_2(\mathbf{x}) = 1 + x_2^2 - x_1 - \frac{1}{10} \sin(3\pi x_1)$$

- Парето фронт
може бити
неконвексан



Пример парето фронта #7: 2D парето фронт

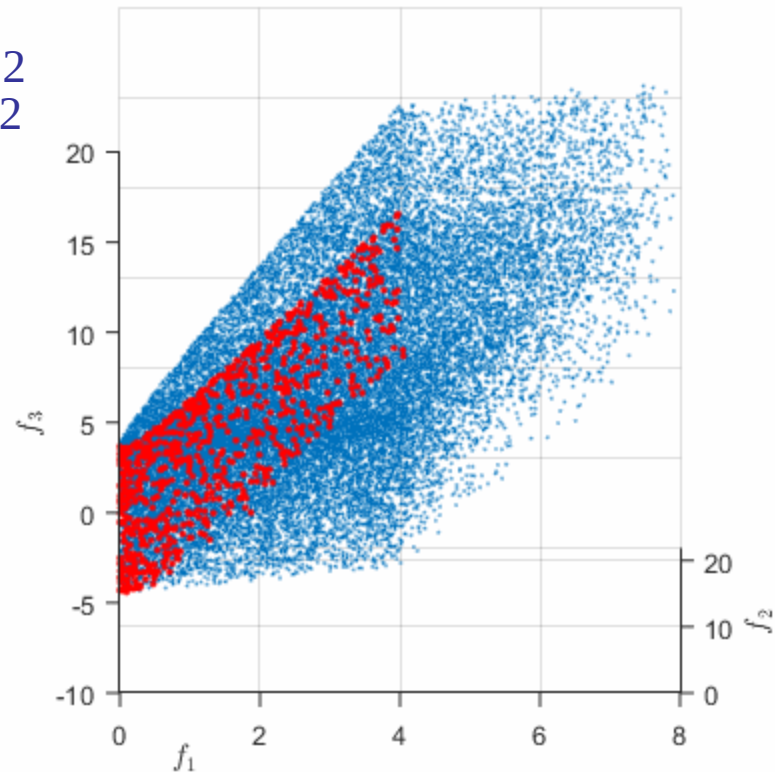
$$\min f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\min f_2(x_1, x_2, x_3) = 10 - 4x_1 + x_2^2$$

$$\min f_3(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_3^2$$

$$-2 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2$$

- Оптимизација са три критеријума
- Парето фронт је 2D површ



Проналажење Парето фронта

- Оптимизациони проблеми који се срећу у инжењерској пракси по правилу имају више критеријума
- По (неписаном) правилу критеријуми оптимизације у реалним проблемима су супротстављени
- Теоријски: за све вишекритеријумске проблеме најбоље што можемо је да пронађемо парето фронт
- Како пронаћи парето фронт?
- Како то урадити ефикасно?

Потпуна претрага и провера да ли решење припада парето фронту

- Најједноставнији начин за проналажење парето фронта је провера свих тачака у оптимизационом простору да ли припадају парето фронту или не
- Тачке се могу генерисати
 - потпуним претраживањем (за опт. просторе са коначним бројем решења)
 - систематским претраживањем
 - случајним претраживањем
- Ово је **изузетно неефикасан** начин, јер у пракси најчешће није могуће потпуно претражити оптимизациони простор
- Ефикаснија решења: коришћење оптимизационих алгоритама

#1: Комбиновање критеријума са тежинским факторима

- Комбиновање више критеријума у јединствену оптимизациону функцију коришћењем тежинских фактора

$$f = w_1 * f_1 + w_2 * f_2$$

- Овај приступ води ка сабирању величина које су по природи различите
- Примери:
цена и квалитет, брзина процесора и температура, функције електронског уређаја и његова запремина, итд.
- Избор тежинских фактора зависи од конкретног проблема и природе величина које се оптимизују (инжењер мора сам да их изабере на основу “искуства”)

Теорија и инжењерска пракса

- Теорија: парето фронт се добија ако узмемо све могуће вредности за тежинске факторе и урадимо оптимизацију за сваку комбинацију
- Бесконечно вредности коефицијената + бесконачно комбинација тежинских фактора = непрактичан приступ
- Које тежинске коефицијенте узети у пракси?
- Више покушаја или морамо имати предзнање о појединачним критеријумима
- Генерално, неефикасан начин и зависан од предзнања корисника

#2: Nondominated sorting GA (NSGA)

- Заснива се на стандардном ГА са изменама у делу за рачунање описне функције
- Израчунавају се описне функције за сваки критеријум, за свако решење у генерацији
- Проналазе се сва (nondominated solutions) решења која одговарају процењеном парето фронту у текућој генерацији
- Додељује се rank#1 и понавља се док сва решења нису рангирана

NSGA: одређивање парето фронта

- Описна функција на основу које се бирају решења за укрштање се рачуна на основу ранга (први ранг је бољи од осталих)
- Укрштање и мутација се раде на стандардан начин примерен ГА
- Парето фронт се памти и побољшава током генерација (тј. током оптимизације)

Рачунање описне функције за NSGA

- Решења се организују у скупове (нише)

- Број нише:

$$m_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{pop}}} Sh(d_{i,j})$$

Растојање у простору
критеријума између
решења i и j

$$Sh(d_{i,j}) = \begin{cases} 1 - \frac{d_{i,j}}{\sigma_{\text{share}}} & d_{i,j} < \sigma_{\text{share}} \\ 0 & d_{i,j} \geq \sigma_{\text{share}} \end{cases}$$

Полупречник
скупа (нише)

- Оптимизациона функција: $F_i = Rank_i \cdot \left(1 + \frac{m_i}{q}\right)$

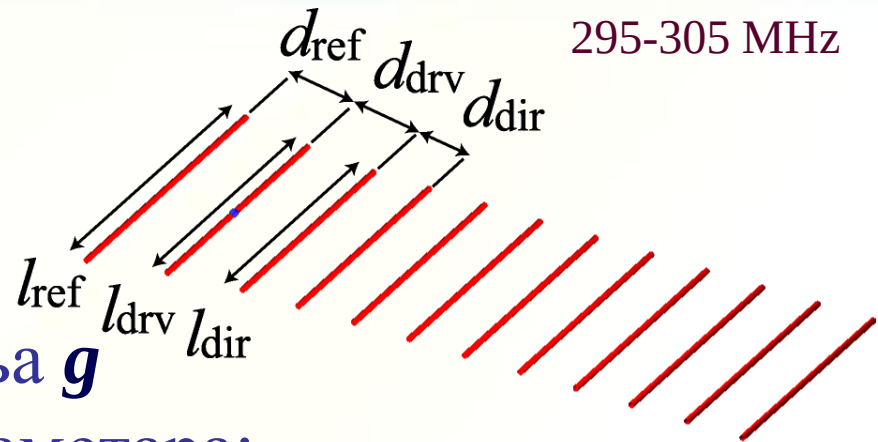
Укупан број решења
у скупу (ниши)

#3: Процена локалних минимума за проналажење парето фронта

- Комбиновање свих критеријума у једну описну функцију коришћењем тежинских фактора
- Вишеструко покретање оптимизације за различите комбинације тежинских фактора
- ПЛМ проналази више оптимума у једном покретању
- Та решења увек представљају процену парето фронта у датом покретању
- Памћење парето фронта за вишеструко покретање и одређивање решења која доминирају у фронту

Инжењерски пример: оптимизација антене

- Минимизирати коефицијент рефлексије s_{11}
- Максимизирати усмерено појачање у главном правцу зрачења g
- 6 оптимизационих параметара:
 $0,2 \text{ m} \leq l_{\text{ref}}, l_{\text{drv}}, l_{\text{dir}}, d_{\text{ref}}, d_{\text{drv}}, d_{\text{dir}} \leq 0,8 \text{ m}$
- **Парето фронт:** колико појачање морамо да “жртвујемо” да бисмо истовремено имали и добро прилагођену антену?



Поставка оптимизације

- **NSGA:** 500 решења, 40 генерација, 20 000 итерација укупно
- **ПЛМ:** 7 комбинација тежинских фактора w_1 , w_2

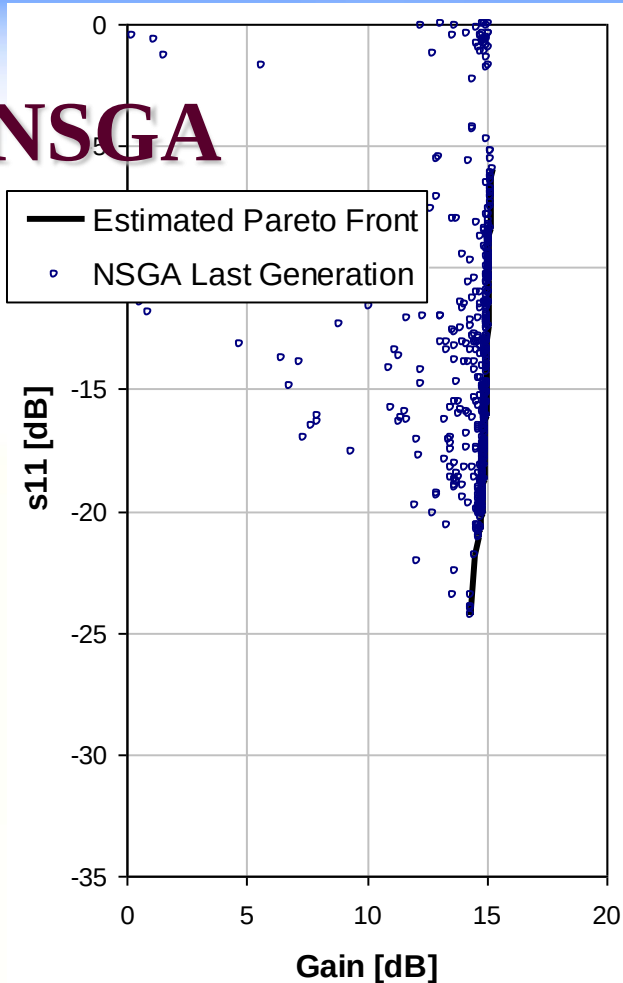
w_1	1	1	10	1	100	0	1
w_2	1	10	1	100	1	1	0

~3 000 итерација за једну комбинацију
20 000 итерација укупно

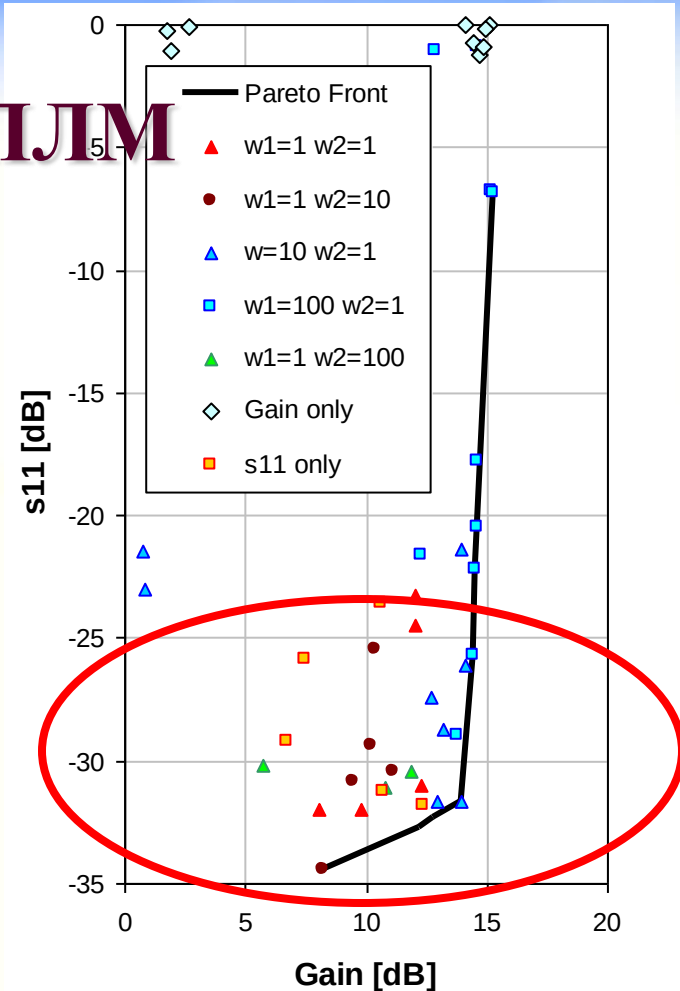
- **20 независних покретања**
како би се проценило понашање алгоритама у статистичком смислу

Процењени парето фронт: резултати су комплементарни!

NSGA



ПЛМ



Предности и мане NSGA и ПЛМ алгоритама

- NSGA:
 - нема тежинских фактора
 - парето фронт се проналази у једном покретању
 - спора конвергенција (дуготрајна оптимизација)
 - потенцијални проблеми са оштрим минимумима
- ПЛМ:
 - бржа конвергенција од NSGA
 - мање зависан од тежинских коефицијената од вишеструког покретања основних опт. алгоритама
 - избор тежинских фактора зависи од проблема

Друге опције за проналажење парето фронта

- Постоје и други алгоритми за проналажење парето фронта
- Практично сви “еволутивни алгоритми” имају верзије за вишекритеријумску оптимизацију
- У литератури се често помиње и NSGA2
- Генерално, проналажење парето фронта је знатно сложенији оптимизациони проблем од оптимизације по једном критеријуму
- Пре почетка оптимизације увек проверити да ли се ради о оптимизацији са једним или више критеријума и на основу тога организовати оптимизацију

Алгоритми за проналажење парето фронта

- MOGA: **M**ulti-**O**bjective **G**enetic **A**lgorithm
- NPGA: **N**iched **P**areto **G**enetic **A**lgorithm
- Predator-Prey Evolution Strategy
- Distributed Reinforced Learning Approach
 - агентима додељене различите опт. функције
- NCGA: **N**eighborhood **C**onstrained **G**A
 - критеријуми се претварају у ограничења
- Nesh GA
 - поправљање једног по једног критеријума (док се остали не дирају)
- MOEA: **M**ulti-**O**bjective **E**volutionary **A**lgorithms

Отворена питања за проблеме са више критеријума

- Како онемогућити груписање решења у једном делу оптимизационог простора?
- Како се перформансе алгоритама за одређивање парето фронта скалирају са повећањем броја критеријума?
- Како обезбедити конвергенцију алгоритма ка свим деловима парето фронта?
- Како поредити перформансе алгоритама?
- Како приказати парето фронт?

Парето оптималност и компромиси

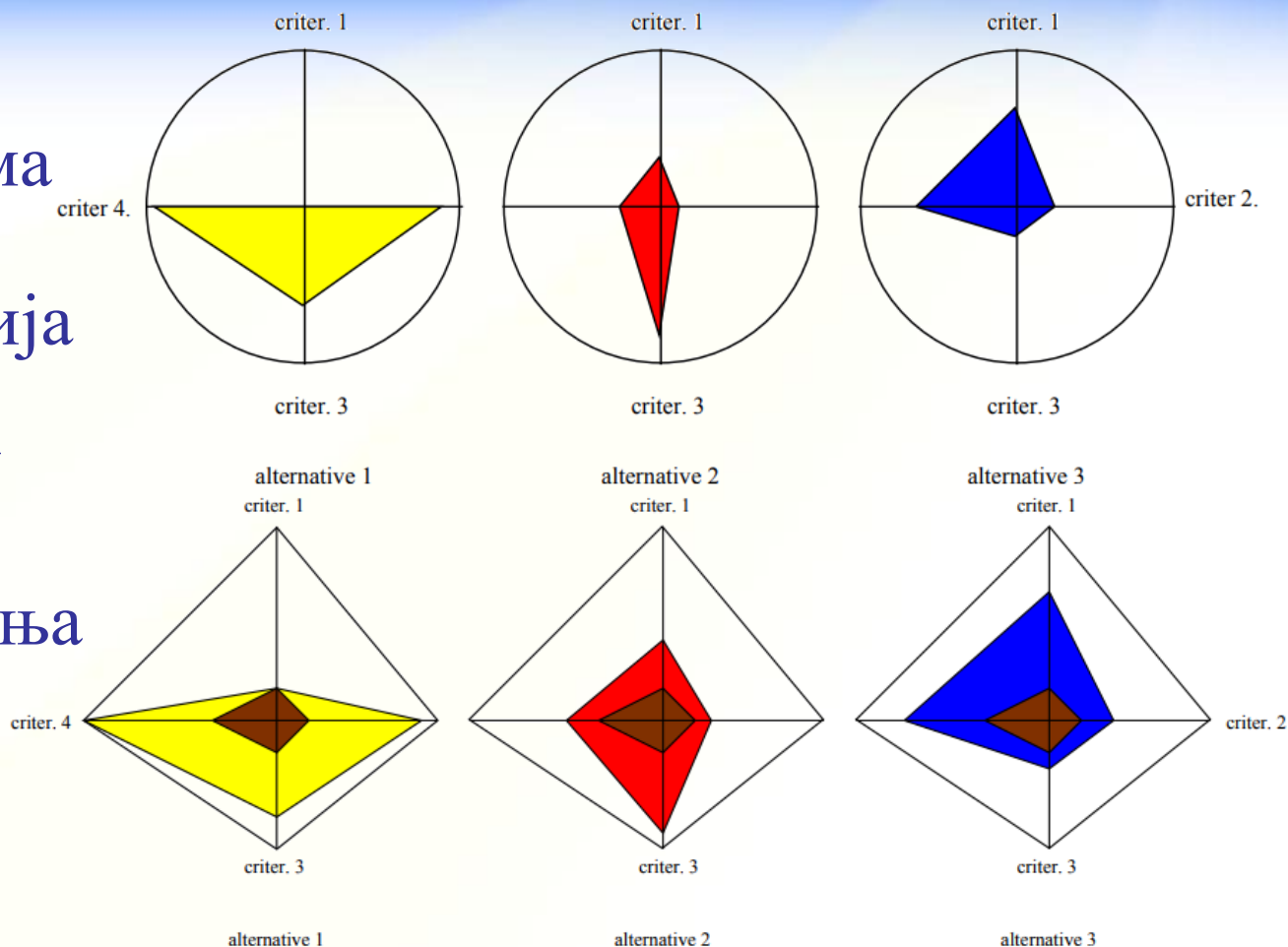
- Већина људи, ван математике, инжењерства и економије НИЈЕ чула за појам парето оптималности
- Међутим, најбољи могући компромиси се јасно (интуитивно) разумеју
 - A good compromise is like a good sentence, or a good piece of music. Everybody can recognize it. They say: 'Huh. It works. It makes sense.'
- Одређивање једне тачке парето фронта је једнако решавању једног проблема са једним критеријумом
- Одређивање парето фронта у већини инжењерских апликација је данас на граници (или изван) доступних рачунарских ресурса!

Како искористити парето фронт?

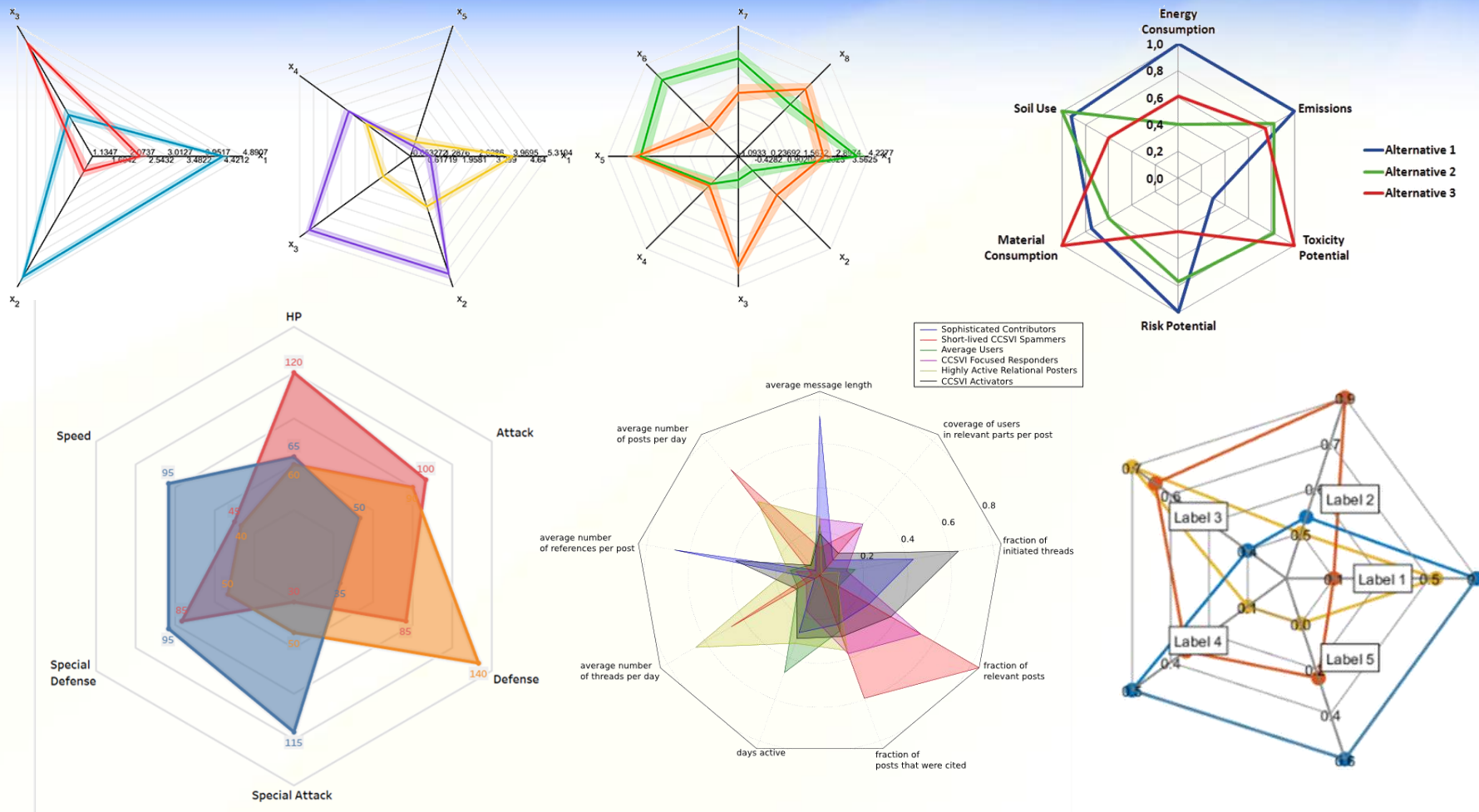
- Уколико је познат **тачан парето фронт** или је позната “најбоља” процена парето фронта имамо увид у скуп свих најбољих компромиса које можемо да направимо за задати проблем
- Шта даље?
- Како одабрати једно од компромисних решења?
- Избор “најбољег” компромиса зависи од онога ко је у позицији да доноси одлуку
- Теорија игара и аутоматско одлучивање

Како визуелно приказати најбоље могуће компромисе?

- Пример:
4 критеријума
- У питању је максимизација по сваком критеријуму
- Графички приказ решења
 - Radar chart
 - Spider chart
 - Star chart



Примери графичког приказа тачака парето фронта



Задатак за вежбе

- На слици је приказан попречни пресек електромагнета у облику соленоида који је дефинисан својим полупречником a , дужином b , укупним бројем завојака N и струјом у завојцима I .
Интензитет магнетског поља, на оси електромагнета (z -оси), на одстојању z_0 од његовог центра, дат

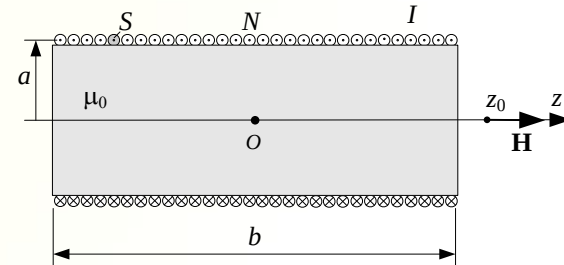
је изразом
$$H = \frac{NI}{2b} \left(\frac{z_0 + b/2}{\sqrt{a^2 + (z_0 + b/2)^2}} - \frac{z_0 - b/2}{\sqrt{a^2 + (z_0 - b/2)^2}} \right).$$

- Укупна отпорност свих завојака је $R = N \frac{2\pi a}{\sigma S}$, где је $\sigma = 58 \text{ MS/m}$

специфична проводност бакарне жице и S је површина попречног пресека жице.

- Полупречник a налази се у опсегу $10^{-2} \text{ m} \leq a \leq 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.
- Дужина b је у опсегу $0,1 \text{ m} \leq b \leq 0,4 \text{ m}$.
- Површина попречног пресека жице S је у опсегу $\frac{1}{2} 10^{-6} \text{ m}^2 \leq S \leq 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.
- Пречник жице је $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$, те је $N = \frac{b}{d} = b \sqrt{\frac{\pi}{4S}}$ укупан број завојака

који су намотани густо и у једном слоју.



Задатак за вежбе

- Одстојање од центра соленоида је $z_0 = \frac{b}{2} + \delta$, где је $\delta = 10^{-2}$ m.
- Струја је константна и износи $I = 1$ A.
- Потребно је максимизирати интензитет магнетског поља,

$$\max H = \frac{I}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4S}} \left(\frac{z_0 + b/2}{\sqrt{a^2 + (z_0 + b/2)^2}} - \frac{z_0 - b/2}{\sqrt{a^2 + (z_0 - b/2)^2}} \right) \text{ и}$$

$$\text{минимизирати укупну отпорност } \min R = \frac{2\pi ab}{\sigma S} \sqrt{\frac{\pi}{4S}}.$$

- Усвојени запис решења је $\mathbf{x} = (a, b, S)$.
- Проценити и нацртати парето фронт овог оптимизационог проблема.
- Користити случајно претраживање или систематско претраживање са бар 10^6 итерација.
- Решење би требало да садржи: код и слику парето фронта (jpeg или png).
- На слици нацртати:
 - (1) сва решења у простору критеријума и
 - (2) јасно означити решења која припадају процењеном парето фронту.
- Решење задатка доставити у засебном ZIP фајлу