ИСПИТ ИЗ
ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА

12. фебруар 2022.

Напомене. Испит траје 180 минута. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба овога листа папира, литературе и рачунара. Коначне одговоре уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Кодове програма коришћених за решавање питања архивирати преко сајта предмета. Решења питања признају се само уколико садрже извођење, образложење или уколико постоји архивиран одговарајући код. Попунити податке о кандидату у следећој таблици. Задаци укупно носе до 40 поена.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		ЗАДАТАК							Укупно
Индекс (година/број)	Презиме и име	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
/									

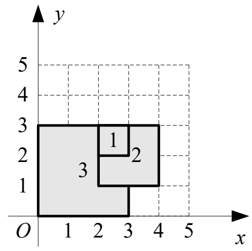
ПРЕДИСПИТНЕ ОБАВЕЗЕ	**ОЦЕНА**

Производи се N квадратних штампаних плочица, чије су димензије у центиметрима редом 1×1, 2×2, $\ldots N\times N$. Ради уштеде материјала, потребно је сложити плочице у правоугаоник тако да неискоришћени простор у том правоугаонику буде минималан. Плочице могу да се додирују, али не смеју да се преклапају. Странице свих квадрата морају бити паралелне координатним осама, као на сликама 1 и 2.

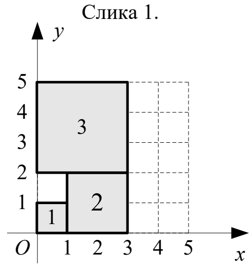
Усвојени запис решења овог проблема је $\mathbf{x}=(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots x_N,y_N)$ где су x_k и y_k координате, у центиметрима, доњег левог темена k-тог квадрата, $k=1,2,\ldots N$. Координате су цели бројеви који задовољавају услов $0\le x_k\le c_{\max}$ и $0\le y_k\le c_{\max}$, где је $c_{\max}$ константа.

Оптимизациона функција је $f(\mathbf{x})=S+N^2P$ где је $S=x_{\max}\cdot y_{\max}$ површина правоугаоника у који су сложене плочице, а чије је доње лево теме у координатном почетку и горње десно теме у тачки $(x_{\max},y_{\max})$, односно $P=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}P_{ij}$, где је P_{ij} површина преклапања плочица i и j.

На слици 1 илустровано је решење $\mathbf{x}'=(2,2,2,1,0,0)$, за $N=3$, за које је $f(\mathbf{x}')=48\,[\mathrm{cm}^2]$, при чему постоје вишеструка преклапања плочица. На слици 2 илустровано је решење $\mathbf{x}''=(0,0,1,0,0,2)$, за $N=3$, за које је $f(\mathbf{x}'')=15\,[\mathrm{cm}^2]$, при чему нема преклапања плочица.



Слика 1.

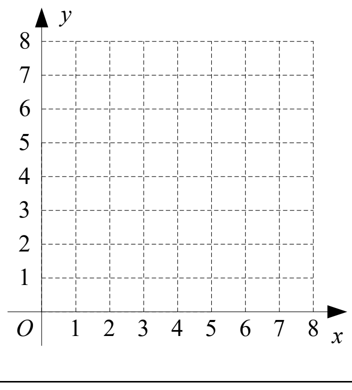


Слика 2.

1. За произвољно N проценити $c_{\max}$ и образложити поступак.

2. Израчунати укупан број израчунавања оптимизационе функције потребан за потпуну претрагу оптимизационог простора за $N=4$ и процењену вредност $c_{\max}$ из претходне тачке.

3. Потпуном претрагом или на неки други начин одредити један глобални минимум за $N=4$. Архивирати одговарајући код или образложити одговор. Записати пронађено решење и вредност оптимизационе функције, те скицирати решење у простору испод.



4. Потпуном претрагом пронаћи укупан број различитих решења која су глобални минимуми за $N = 4$. Записати тај укупан број.

5. Израчунати вредност оптимизационе функције за $N = 12$ и
$\mathbf{x}_0$ = (0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,11,11).

6. Ради решавања проблема за $N = 12$ имплементирати један од оптимизационих алгоритама са курса. Навести име алгоритма и модификације. Архивирати одговарајући код.

7. Коришћењем претходно наведеног алгоритма пронаћи једно решење за $N = 12$. Записати име текстуалног фајла у којем се налази решење, као и минималну добијену вредност оптимизационе функције.

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА СА ИСПИТА ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА ОДРЖАНОГ 12. ФЕБРУАРА 2022. ГОДИНЕ

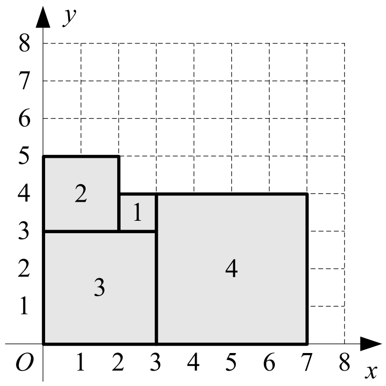
Расподела поена по питањима је означена у заградама.

1. Уколико је N плочица наслагано једна до друге, од најмање до највеће, дуж једне осе, тада је $c_{\max 0} = \sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2}$.

Уколико бисмо усвојили већу вредност од $c_{\max 0}$ дозволи бисмо да и у случају узастопно наслаганих плочица постоји размак између њих, што непотребно повећава оптимизациони простор. У општем случају није једноставно закључити за коју мању вредност од $c_{\max 0}$ сигурно постоји оптимално решење. Стога је $c_{\max} = c_{\max 0}$. (4)

2. Укупан број итерација за потпуну претрагу за $N = 4$ је $(c_{\max} + 1)^{2N} = 7^8 = 5\,764\,801$. (3)

3. Један глобални минимум за $N = 4$ је $\mathbf{x}_{\mathrm{g}} = (2,3,0,3,0,0,3,0)$, при чему је $f(\mathbf{x}_{\mathrm{g}}) = 35\,[\mathrm{cm}^2]$. Ово решење је приказано на слици испод. (3)

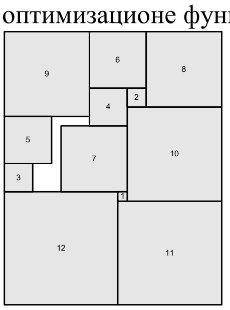


4. Укупан број глобалних минимума за $N = 4$ је 192. (6)

5. $f(\mathbf{x}_0) = 103\,489\,[\mathrm{cm}^2]$. (6)

6. Симулирано каљење или генетички алгоритам. (3)

7. Најбоље познато решење за овај проблем је
$\mathbf{x}_{\mathrm{g}}$ = (12,11,13,21,0,12,9,19,0,15,9,23,6,12,15,21,0,20,13,11,12,0,0,0)
за које је $f(\mathbf{x}_{\mathrm{g}}) = 667\,[\mathrm{cm}^2]$. Ово решење илустровано је на слици испод. Постоје и друга решења са истом вредношћу оптимизационе функције. (15)



- РЕЗУЛТАТИ ИСПИТА БИЋЕ ОБЈАВЉЕНИ ДО 12. ФЕБРУАРА У 18 ЧАСОВА, НА САЈТУ ПРЕДМЕТА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ, У ЛАБОРАТОРИЈИ 64, ЈЕ 12. ФЕБРУАРА ОД 18.00 ДО 18.30 ЧАСОВА.