ИСПИТ ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА

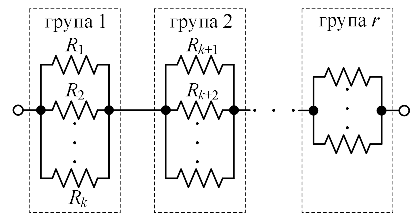
25. јануар 2023.

Напомене. Испит траје 180 минута. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба овога листа папира, литературе и рачунара. Коначне одговоре уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Кодове програма коришћених за решавање питања архивирати преко сајта предмета. Решења питања признају се само уколико садрже извођење, образложење или уколико постоји архивиран одговарајући код. Попунити податке о кандидату у следећој таблици. Сваки задатак носи до 20 поена.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		ЗАДАТАК		Укупно
Индекс (година/број)	Презиме и име	1.	2.	
/				

ПРЕДИСПИТНЕ ОБАВЕЗЕ	**ОЦЕНА**

1. Дат је један краткоспојник и 12 различитих отпорника, који заједно чине скуп елемената чије су отпорности $R_{[\Omega]} = \{0, 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82\}$. Ови елементи се повезују паралелно у групе, а број елемената у групи може бити од један до $|R| = 13$. Групе елемената се затим повезују редно, како би се добила електрична мрежа приказана на слици 1. Еквивалентна отпорност R_g паралелно повезаних елемената је $\frac{1}{R_g} = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{R_p}$, где су R_p отпорности елемената групе g, којих има укупно k ($1 \le k \le 13$). Еквивалентна отпорност редно повезаних група је $R_e = \sum_{g=1}^{r} R_g$, где је r укупан број група.



Слика 1.

Потребно је одредити груписање (и описано повезивање) задатих елемената, како би се остварила отпорност која има минималну апсолутну грешку у односу на тражену отпорност R_x, тј. $\min|R_e - R_x|$. При повезивању, сви елементи морају да се искористе тачно једном. Приметити да (паралелно) повезивање елемената у групу са краткоспојником даје еквивалентну отпорност групе нула. Редослед елемената у групи, као и редослед група у описаној мрежи није битан, јер дају исту укупну еквивалентну отпорност, тј. решења добијена заменом редоследа елемената у групама или заменом редоследа група сматрају се идентичним решењем.

(а) Уколико се проблем решава потпуном претрагом, потребно је урадити претрагу по (заокружити тачан одговор и образложити га):

- свим пермутацијама елемената скупа R
- свим варијацијама са понављањем елемената скупа R
- свим комбинацијама елемената скупа R
- свим партицијама скупа R
- свим партицијама броја $|R|$
- свим композицијама броја $|R|$

(б) Пронаћи и записати бар једно груписање елемената тако да се добије најбоља апроксимација тражених отпорности $R_{x1} = 23\,\Omega$ и $R_{x2} = 400\,\Omega$, као и апсолутне грешке добијених решења.

(в) Задатак се проширује тако да је, поред најбоље апроксимације R_x, потребно истовремено минимизирати број елемената који нису повезани у групи са краткоспојником. Пронаћи и записати сва решења за: $R_{x3} = 283\,\Omega$ и $R_{x4} = 309\,\Omega$, одговарајуће апсолутне грешке добијених решења и минималне бројеве елемената који нису повезани у групи са краткоспојником.

2. Глобални систем за позиционирање (скраћено GPS) ради тако што сателити емитују електромагнетске сигнале који носе податке о времену слања и тренутној позицији сателита. Пријемник, на основу примљеног сигнала, одређује време (t) потребно за пропагацију сигнала од сателита до пријемника. Затим, на основу познате брзине простирања електромагнетских таласа ($c_0 = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$), пријемник израчунава своје одстојање од сателита. Ако је познат сигнал једног сателита, онда се пријемник налази негде на сфери чија је једначина $\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{R^2}=1$, где је R (полупречник сфере) растојање између пријемника и сателита, (x_0, y_0, z_0) су познате координате сателита (центар сфере), а (x, y, z) су непознате координате пријемника. У једном тренутку потребно је минимално четири сигнала са различитих сателита како би се једнозначно одредила позиција пријемника, тј. како би се нашла тачка пресека четири сфере. У табели I свака колона одговара подацима за један (од четири) сателита. Запис решења овог проблема су непознате координате пријемника (x, y, z), а оптимизациона функције се рачуна као

$$f(x,y,z)=\sqrt{\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{(x-x_{0k})^2+(y-y_{0k})^2+(z-z_{0k})^2}{(c_0 t_k)^2}-1\right)^2} .$$

Табела I. Подаци о позицији сателита и времену простирања сигнала од сателита до пријемника.

Редни број сателита, k	1	2	3	4
x_{0k} [m]	9,353956971444877e+06	2,118990698587988e+07	1,982601765067424e+07	8,269561714563388e+06
y_{0k} [m]	1,241312016061606e+07	3,927317122951025e+06	3,567263619968160e+06	2,272043407954935e+07
z_{0k} [m]	2,155077673436540e+07	1,554291038208530e+07	1,732690668817735e+07	1,101881415061893e+07
Тачно време простирања [s]	6,953977405819632e−02	6,796520885661889e−02	6,769215215591819e−02	7,501668358266193e−02
Време простирања са грешком [s]	6,953977e−02	6,796521e−02	6,769215e−02	7,501668e−02

(а) На основу познатих координата сателита и тачног времена простирања сигнала израчунати и записати са 15 значајних цифара позицију пријемника и одговарајућу (минималну) вредност оптимизационе функције. Тачно време дато је у претпоследњем реду табеле I.

(б) Услед техничких ограничења време простирања познато је типично са грешком од $\pm 10\ \mathrm{ns}$. Поновити претходну тачку, уколико је уместо тачног времена познато време простирања са грешком, дато је у последњем реду табеле I.

(в) Израчунати растојање између решења добијених у тачкама (а) и (б), тј. израчунати грешку одређивања позиције услед ограничене тачности са којом су позната времена простирања.

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА СА ИСПИТА ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА ОДРЖАНОГ 25. ЈАНУАРА 2023. ГОДИНЕ

Расподела поена по питањима је означена у заградама.

1. (а) Како је потребно искористити све елементе, а није битан ни редоследе елемената у групи, ни редослед група, описани задатак своди се на претрагу по свим партицијама скупа R. (4)

(б) Најбоља апроксимација отпорности $R_{x1} = 23\,\Omega$ одговара партицији скупа R
$\{\{0, 27, 39, 47, 56, 82\}, \{10, 68\}, \{12, 15\}, \{18, 22, 33\}\}$ која се може записати и као RGS
$\mathbf{x}_1$ = (0, 1, 2, 2, 3, 3, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0), а апсолутна грешка апроксимације је нула. (4)

Најбоља апроксимација отпорности $R_{x2} = 400\,\Omega$ одговара партицији скупа R
$\{\{0\}, \{10, 27\}, \{12\}, \{15\}, \{18\}, \{22\}, \{33\}, \{39\}, \{47\}, \{56\}, \{68\}, \{82\}\}$ која се може записати и као RGS
$\mathbf{x}_2$ = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11), а апсолутна грешка апроксимације је 0,7027027027027089 Ω. (4)

(в) Оптимално решење за апроксимацију отпорности $R_{x3} = 283\,\Omega$ одговара партицији скупа R
$\{\{0, 10, 15, 22, 27, 33, 39\}, \{12\}, \{18\}, \{47\}, \{56\}, \{68\}, \{82\}\}$ која се може записати и као RGS
$\mathbf{x}_3$ = (0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 4, 5, 6), апсолутна грешка апроксимације је нула, а број елемената који нису у групи са краткоспојником је шест. (4)

Постоје **два** оптимална решења за апроксимацију отпорности $R_{x4} = 309\,\Omega$ којима одговарају партиције скупа R:
$\{\{0, 10, 12, 15, 27, 56\}, \{18\}, \{22\}, \{33\}, \{39\}, \{47\}, \{68\}, \{82\}\}$ која се може записати и као RGS
$\mathbf{x}_4^{(1)}$ = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 3, 4, 5, 0, 6, 7), односно
$\{\{0, 10, 18, 12, 33, 47\}, \{15\}, \{22\}, \{27\}, \{39\}, \{56\}, \{68\}, \{82\}\}$ која се може записати и као RGS
$\mathbf{x}_4^{(2)}$ = (0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 4, 0, 5, 6, 7). У оба случаја апсолутна грешка апроксимације је нула, а број елемената који нису у групи са краткоспојником је седам. (4)

2. (а) $(x,\ y,\ z)_{[\mathrm{m}]}$=(4,234647881079292e+06, 1,581270102339405e+06, 4,489652902699516e+06),
$f(x, y, z) < 10^{-15}$. (8)

(б) $(x_\mathrm{a},\ y_\mathrm{a},\ z_\mathrm{a})_{[\mathrm{m}]}$=(4,234646914586907e+06, 1,581270926023640e+06, 4,489654287569179e+06),
$f(x_\mathrm{a}, y_\mathrm{a}, z_\mathrm{a}) \approx 5{,}8 \cdot 10^{-8}$. (8)

(в) $\sqrt{(x - x_\mathrm{a})^2 + (y - y_\mathrm{a})^2 + (z - z_\mathrm{a})^2} \approx 1{,}88\,\mathrm{m}$. (4)

- РЕЗУЛТАТИ ИСПИТА БИЋЕ ОБЈАВЉЕНИ ДО 25. ЈАНУАРА У 13:30, НА САЈТУ ПРЕДМЕТА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ, У КАНЦЕЛАРИЈИ 88, ЈЕ 25. ЈАНУАРА ОД 13:30 ДО 14 ЧАСОВА.