

# ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА

4. новембар 2022.

Напомене. Колоквијум траје 120 минута. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба овога листа папира, литературе и рачунара. Коначне одговоре уписати у одговарајуће кућице, учртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Кодове програма коришћених за решавање питања архивирати преко сајта предмета. Решења питања признају се само уколико садрже извођење, образложење или уколико постоји архивиран одговарајући код. Попунити податке о кандидату у следећој табели. Колоквијум носи 20 поена.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		ПИТАЊЕ						Укупно
Индекс (година/број)	Презиме и име	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
/								

Корисник изнајмљује  $N \geq 1$  сервера на којима жели да обради тачно  $N$  пакета података. Сви сервери се међусобно разликују. Брзина којом сервер  $k$  обрађује податке је  $s_k = k \frac{\text{GB}}{\text{min}}$ , где је  $1 \leq k \leq N$ . Величине пакета података, које је потребно обрадити, су  $p_k = k \text{ GB}$ , где је  $1 \leq k \leq N$ . Кориснику се наплаћује рад сервера по целом минути који је сервер радио, тј. број минута који се наплаћују за изнајмљивање сервера брзине  $s$  при обради пакета података величине  $p$  је  $\left\lceil \frac{p}{s} \right\rceil$ , где назначене заграде означавају цео део резултата који се добија дељењем  $p$  са  $s$ . На пример, ако сервер брзине  $s = 3 \frac{\text{GB}}{\text{min}}$  обрађује пакет података величине  $p = 5 \text{ GB}$ , онда се наплаћује  $\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2 \text{ min}$ , а ако се на истом серверу обрађује пакет података величине  $p = 9 \text{ GB}$ , онда се наплаћује  $\left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3 \text{ min}$ . Свих  $N$  расположивих сервера морају да се искористе и свих  $N$  пакета мора да буде обрађено тачно једном. При томе, сваки пакет података мора да се обради на посебном серверу. Потребно је пронаћи распоред пакета по серверима тако да број минута које би корисник требало да плати буде минималан.

Један могући распоред обраде пакета на расположивим серверима је  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , где је  $x_k$  величина пакета, у GB, који се обрађује на  $k$ -том серверу. Низ  $\mathbf{x}$  је истовремено и (природан) запис једног решења описаног проблема.

1. (а) Заокружити којој генералној класи оптимизационих проблема припада описани проблем. Образложити одговор.  
 (б) Одредити израз за величину оптимизационог простора уколико се  $N$  сматра познатим.

(а) <ul style="list-style-type: none"> <li>• SAT</li> <li>• TSP</li> <li>• NLP</li> </ul>
(б)

2. Оптимизациона функција је број минута који се наплаћују кориснику. У општем случају, за познато  $N$ , написати израз за израчунавање оптимизационе функције.

3. За  $N = 3$  записати све могуће распоред пакета на серверима и за сваки распоред израчунати вредност оптимизационе функције.

4. Написати програм којим се потпуно (систематски) претражује оптимизациони простор и помоћу тог програма пронаћи све могуће распореде обраде пакета за које се добија минимум оптимизационе функције, као и минималну вредност оптимизационе функције за (а)  $N = 10$  и (б)  $N = 13$ . Код програма као и решење записано у текстуалном фајлу архивирати кроз портал предмета.

(а)

(б)

5. Написати програм којим се на случајан начин, са униформном расподелом, претражује оптимизациони простор. Коришћењем тог програма, за  $N = 23$  и  $10^8$  израчунавања оптимизационе функције, записати најбољи пронађен распоред обраде пакета и одговарајућу вредност оптимизационе функције. Код програма као и решење записано у текстуалном фајлу архивирати кроз портал предмета.

6. Да ли постоји боље решење за  $N = 23$  од решења пронађеног у претходној тачки? Уколико је одговор потврдан, пронаћи то решење и записати минималну вредност оптимизационе функције. Образложити одговор и решење. Уколико је коришћен рачунар за решавање, код програма као и решење записано у текстуалном фајлу архивирати кроз портал предмета.

# ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА СА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА ОДРЖАНОГ 4. НОВЕМБРА 2022. ГОДИНЕ

Расподела поена по питањима означена је у заградама.

1. (а) Проблем се своди на претрагу по свим могућим пермутацијама распореда пакета на серверима, те овај проблем припада класи TSP оптимизационих проблема. (1)

(б) Величина оптимизационог простора је  $N! = N \cdot (N-1) \dots 2 \cdot 1$ . (1)

2. Оптимизациона функција је  $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{x_k}{c_k} \right\rfloor$ . (1)

3. У табели испод дати су сви распореди, као и одговарајуће вредности оптимизационе функције, за  $N = 3$ . (2)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)
$f(\mathbf{x})$ [min]	3	2	3	3	3	4

4. (а) Постоји дванаест решења за које је  $f(\mathbf{x}_a) = 4$  min (3)

$\mathbf{x}_a = (1, 2, 5, 3, 4, 10, 6, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 5, 4, 10, 6, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 10, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 6, 4, 10, 5, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 7, 4, 5, 6, 10, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 7, 4, 5, 10, 6, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 7, 4, 10, 5, 6, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 7, 4, 10, 6, 5, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 2, 10, 4, 5, 6, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 3, 5, 2, 4, 10, 6, 7, 8, 9),$   
 $\mathbf{x}_a = (1, 5, 2, 3, 4, 10, 6, 7, 8, 9)$  и  
 $\mathbf{x}_a = (2, 1, 5, 3, 4, 10, 6, 7, 8, 9).$

(б) Постоји три решења за која је  $f(\mathbf{x}_b) = 4$  min (4)

$\mathbf{x}_b = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 13, 7, 8, 9, 10, 11, 12),$   
 $\mathbf{x}_b = (1, 3, 2, 7, 4, 5, 6, 13, 8, 9, 10, 11, 12)$  и  
 $\mathbf{x}_b = (1, 3, 2, 7, 4, 5, 13, 6, 8, 9, 10, 11, 12).$

5. За  $N = 23$  постоји тачно 55 решења за која је  $f(\mathbf{x}) = 5$  min. Вероватноћа проналажења једног од тих решења на случајан начин, са униформном расподелом, је  $\frac{55}{23!} \approx 2,1 \cdot 10^{-21}$ . Стога, није очекивано да се овакво решење пронађе после

$10^8$  израчунавања оптимизационе функције, већ је очекивано да буде пронађено неко од решења за која је  $f(\mathbf{x}) = 10$  min. Једно такво решење је

$\mathbf{x} = (1, 3, 5, 2, 9, 4, 8, 6, 10, 7, 18, 21, 22, 11, 12, 13, 14, 23, 15, 17, 20, 16, 19)$ . (4)

6. Прво решење за  $N = 23$ , за које је  $f(\mathbf{x}) = 5$  min, у лексикографском поретку је

$\mathbf{x} = (1, 2, 5, 3, 4, 11, 6, 7, 8, 9, 10, 23, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22)$ . (4)

До овог решења може се доћи потпуном претрагом са одсецањем делова оптимизационог простора. Наиме, уколико пакети који се обрађују на првих  $k$  сервера дају вредност оптимизационе функције која је већа од најбоље пронађене до тог тренутка, све пермутације пакета који се обрађују на преосталим серверима је потребно прескочити у претрази, јер без обзира на њихов распоред оптимизациона функција не може бити мања.

До истог решења може се доћи и посматрањем оптималног распореда пакета за  $N = 3, 4, 5, \dots$  и увиђањем правилности која постоји у тим распоредима. При томе, могуће је доказати да је минимална вредност оптимизационе функције  $f_{\min} = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ .

- РЕЗУЛТАТИ КОЛОКВИЈУМА БИЋЕ ОБЈАВЉЕНИ ДО 5. НОВЕМБРА У 11 ЧАСОВА, НА САЈТУ ПРЕДМЕТА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ, У ЛАБОРАТОРИЈИ 64, ЈЕ 5. НОВЕМБРА ОД 11:15 ДО 12:00 ЧАСОВА.