ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА

3. новембар 2023.

Напомене. Колоквијум траје 120 минута. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба овога листа папира, литературе и рачунара. Коначне одговоре уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Кодове програма коришћених за решавање питања архивирати преко сајта предмета. Решења питања признају се само уколико садрже извођење, образложење или уколико постоји архивиран одговарајући код. Попунити податке о кандидату у следећој таблици. Колоквијум носи 20 поена.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		ПИТАЊЕ					Укупно
Индекс (година/број)	Презиме и име	1.	2.	3.	4.	5.	
/							

Матрица $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NN} \end{bmatrix}$ је димензија $N\times N$, а њени елементи су бити, тј. $x_{ij}\in\{0,1\}$, $1\le i,j\le N$. Познати су збирови елемената матрице по врстама $\mathbf{R}=[R_1,R_2,\dots R_N]$, где је $R_k=\sum_{p=1}^{N}x_{kp}$, $k=1,2,\dots N$ и колонама $\mathbf{C}=[C_1,C_2,\dots C_N]$, где је $C_k=\sum_{p=1}^{N}x_{pk}$. За задато N, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ потребно је пронаћи матрицу $\mathbf{M}$. На слици 1 приказан је један пример матрице $\mathbf{M}$ за $N=5$, $\mathbf{R}=[5,3,3,0,2]$ и $\mathbf{C}=[4,4,2,2,1]$.

$$\begin{array}{c} \\ R_1{=}5 \\ R_2{=}3 \\ R_3{=}3 \\ R_4{=}0 \\ R_5{=}2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1{=}4 & C_2{=}4 & C_3{=}2 & C_4{=}2 & C_5{=}1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Слика 1.

Формални запис решења проблема је $\mathbf{x}=[x_{11},x_{12},\dots x_{1N},x_{21},x_{22},\dots x_{2N},\dots x_{N1},x_{N2},\dots x_{NN}]$. Оптимизациона функција се дефинише као L^1 норма разлике $\mathbf{R}$ и збирова елемената по врстама, односно разлике $\mathbf{C}$ и збирова елемената по колонама.

1. (а) Заокружити којој општој класи оптимизационих проблема (SAT, TSP или NLP) припада описани проблем и образложити одговор. (б) Уколико је N задато, одредити израз за укупан број решења у оптимизационом простору.

(а)

- SAT
- TSP
- NLP

(б)

2. Записати оптимизациону функцију $f(\mathbf{x})$ и израчунати $f(\mathbf{x}_0)$ за $N=5$, $\mathbf{R}=[5,3,3,0,2]$ и $\mathbf{C}=[4,4,2,2,1]$, ако је $\mathbf{x}_0=(0,1,1,1,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1)$.

3. За пример са слике 1 проверити да ли постоје и друга решења и записати их уколико постоје. Образложити одговор или приложити одговарајући програм.

4. Написати програм којим се на случајан начин, са униформном расподелом, претражује оптимизациони простор. Коришћењем тог програма, за $N = 8$, $\mathbf{R} = [7,3,3,4,3,\ 3,7,0]$ и $\mathbf{C} = [2,7,7,3,5,\ 2,4,0]$, као и 10^7 израчунавања оптимизационе функције, записати најбоље пронађено решење и одговарајућу вредност оптимизационе функције. Код програма као и решење записано у текстуалном фајлу архивирати кроз портал предмета.

5. Написати програм којим се потпуно (систематски) претражује оптимизациони простор, уз евентуално одсецање делова простора. Помоћу тог програма пронаћи све могуће матрице $\mathbf{M}$ за $N = 8$, $\mathbf{R} = [7,3,3,4,3,\ 3,7,0]$ и $\mathbf{C} = [2,7,7,3,5,\ 2,4,0]$. Код програма као и решење записано у текстуалном фајлу архивирати кроз портал предмета. У простору испод записати број пронађених решења.

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА СА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ ИНЖЕЊЕРСКИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ АЛГОРИТАМА ОДРЖАНОГ 3. НОВЕМБРА 2023. ГОДИНЕ

Расподела поена по питањима означена је у заградама.

1. (а) Проблем се своди на претрагу по свим могућим варијацијама два елемента (бита) на N^2 места, те овај проблем припада класи SAT оптимизационих проблема. (1)

(б) Укупан број решења у оптимизационом простору је 2^{N^2}. (1)

2. $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} \left| R_k - \sum_{p=1}^{N} x_{kp} \right| + \sum_{k=1}^{N} \left| C_k - \sum_{p=1}^{N} x_{pk} \right|$, а за задате податке $f(\mathbf{x}_0) = 8$. (2)

3. Постоје два решења. (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. За $N = 8$ постоји тачно 22 решења за која је $f(\mathbf{x}) = 0$. Вероватноћа проналажења једног од тих решења на случајан начин, са униформном расподелом, је $\frac{22}{2^{64}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-18}$. Стога, није очекивано да се овакво решење пронађе после 10^7 израчунавања оптимизационе функције, већ је очекивано да буде пронађено неко од решења за која је $f(\mathbf{x}) = 18$. Једно такво решење је приказано испод. (4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. На основу $\mathbf{R} = [7,3,3,4,3,\ 3,7,0]$ и $\mathbf{C} = [2,7,7,3,5,\ 2,4,0]$ прво се може закључити да су елементи последњег реда и последње колоне матрице $\mathbf{M}$ једнаки нули. Преостали елементи првог и седмог реда су један, а затим следи: преостали елементи прве колоне су нула, друге и треће колоне су један, а шесте колоне су нула. Тиме остаје само 15 елемента које је потребно одредити, што се може урадити потпуном претрагом (варијације са понављањем два елемента на 15 места). Постоји 22 решења за матрицу $\mathbf{M}$. Сва решења су приказана на наредној страни, сложена у формату 8×8 и без ознака за матрице ради компактности приказа. На првом приказаном решењу, црвеном бојом су истакнути бити који се могу разликовати међу решењима. (10)

- РЕЗУЛТАТИ КОЛОКВИЈУМА БИЋЕ ОБЈАВЉЕНИ ДО 9. НОВЕМБРА У 21:00, НА САЈТУ ПРЕДМЕТА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ, У ЛАБОРАТОРИЈИ 64, ЈЕ 10. НОВЕМБРА ОД 10:30 ДО 11:00 ЧАСОВА.

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0